

ZUR EXISTENZ VON FIXPUNKTEN
BEI ABBILDUNGEN
MIT VOLLSTETIGEN ITERIERTEN

Heinrich Steinlein

München

1970



Digitized by the Internet Archive
in 2026

ZUR EXISTENZ VON FIXPUNKTEN BEI
ABBILDUNGEN MIT VOLLSTETIGEN ITERIERTEN

Inaugural - Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Ludwig - Maximilians - Universität München

vorgelegt von
Heinrich Steinlein
aus Erlangen

München, Januar 1970



1. Berichterstatter: Prof. Dr. E. Wienholtz
2. Berichterstatter: Prof. Dr. G. Hämmerlin

Tag der mündlichen Prüfung: 8. 7. 1970

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Einleitung	1
1. Die Hauptsätze	9
2. Ein Lemma, auf das die Hauptsätze zurückgeführt werden können	20
3. Besondere Abänderungen von stetig differenzier- baren Operatoren	32
4. Der Beweis von Lemma 1	53
Anhang I	73
Anhang II	73
Anhang III	74
Bezeichnungen	75
Literaturverzeichnis	77

Einleitung

Es sei M eine Teilmenge eines Banachraumes E . (Auch im folgenden soll E stets ein Banachraum sein.) Eine Abbildung $f: M \rightarrow E$ heißt "vollstetig", wenn f stetig ist und $\overline{f(N)}$ kompakt ist für alle beschränkten Mengen $N \subset M$.

J. Schauder [22] bewies den bekannten Fixpunktsatz

SATZ A1. Es sei M eine nichtleere, kompakte, konvexe Teilmenge von E . Dann besitzt jede stetige Abbildung $f: M \rightarrow M$ mindestens einen Fixpunkt.

Wie man ohne Schwierigkeiten aus Ergebnissen von S. Mazur [16] ("Die konvexe Abschließung einer kompakten Teilmenge eines Banachraumes ist kompakt.") und J. Dugundji [5] (Theorem 4.1: Verallgemeinerung des Tietzeschen Ergänzungssatzes) folgern kann, gibt es zu Satz A1 noch eine Reihe von äquivalenten Formulierungen wie beispielsweise:

SATZ A2. Es sei M eine nichtleere, abgeschlossene, konvexe Teilmenge von E und $f: M \rightarrow M$ eine vollstetige Abbildung, deren Bildmenge $f(M)$ beschränkt ist. Dann besitzt f mindestens einen Fixpunkt.

SATZ A3. Es sei M eine nichtleere, offene, konvexe Teilmenge von E und $f: \overline{M} \rightarrow \overline{M}$ eine vollstetige Abbildung, deren Bildmenge $f(\overline{M})$ beschränkt ist. Dann besitzt f mindestens einen Fixpunkt.

SATZ A4. Die Abbildung $f: E \rightarrow E$ sei vollstetig und $f(E)$ beschränkt. Dann besitzt f mindestens einen Fixpunkt.

Inzwischen gibt es eine große Zahl von Verallgemeinerungen des Schauderschen Fixpunktsatzes. Neben der Betrachtung von lokalkonvexen Räumen statt Banachräumen und der Einschränkung der Bedingung, daß M konvex sein soll, (siehe insbesondere A. Tychonoff [24], M. Hukuhara [10] und S. Lefschetz [14]) wurden die Forderungen an die Abbildung in verschiedenster Weise reduziert durch

- a) Abschwächung der Forderung $f(\bar{M}) \subset \bar{M}$ im Falle von Satz A3,
- b) Betrachtung von nicht vollstetigen Operatoren bei den Sätzen A3 und A4,
- c) Einschränkung der Bedingung, daß $f(M)$ beschränkt sein soll, bei den Sätzen A2, A3 und A4.

Für den Fall a) ist das bekannteste Beispiel der Roth'sche Fixpunktsatz (E. H. Rothe [19]), der besagt, daß anstelle von $f(\bar{M}) \subset \bar{M}$ schon die Voraussetzung $f(\partial M) \subset \bar{M}$ genügt. Dies wurde von Rothe zwar nur für die Einheitskugel bewiesen, doch erhält man recht leicht die gleiche Aussage auch für allgemeine offene, konvexe, nicht notwendig beschränkte Mengen M . Eine interessante Verallgemeinerung des Roth'schen Fixpunktsatzes wurde von P. P. Zabreiko - M. A. Krasnosel'skiĭ [25] angegeben (siehe hierzu auch Lemma 2 der vorliegenden Arbeit).

Bei Punkt b) kommt man mit der Voraussetzung der Stetigkeit alleine anstelle der Vollstetigkeit nicht aus, wie Beispiele von S. Kakutani [12], J. Dugundji [5] oder auch D. Göhde [8] zeigen. Beispiele für nicht vollstetige Operatoren, auf die sich die Sätze A3 und A4 verallgemeinern

lassen, sind die Abbildungen $f = f_1 + f_2$, wobei f_1 vollständig und f_2 kontrahierend (d.h. Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $q < 1$) ist. Solche Abbildungen wurden insbesondere von M. A. Krasnosel'skiĭ [13], R. L. Frum-Ketkov [6] und P. P. Zabreĭko - M. A. Krasnosel'skiĭ [25] untersucht. Ein noch allgemeineres Ergebnis erhielt B. N. Sadovskii [20] durch Betrachtung von "verdichtenden" Operatoren (vgl. auch Anhang III).

Nicht zu dieser Klasse von Operatoren gehört zum Teil die Menge der stetigen Abbildungen mit vollstetigen Iterierten. Für solche Abbildungen wurde von D. Göhde [7] eine Reihe von Fixpunktsätzen bewiesen, allerdings mit teilweise stark einschränkenden zusätzlichen Voraussetzungen an die Operatoren.

In enger Beziehung zur vorliegenden Arbeit stehen die beiden folgenden Sätze, die Verallgemeinerungen des Schauderschen Fixpunktsatzes nach den oben erwähnten Gesichtspunkten a) und c) darstellen ¹⁾:

¹⁾ In einem beliebigen Raum R wird mit "id" die identische Abbildung bezeichnet, d.h. es ist $\text{id}: R \rightarrow R$ mit $\text{id}(x) = x$ für alle $x \in R$. Es seien M und N Teilmengen von R mit $M \subset N$. Dann wird der Definitionsbereich einer Abbildung $f: N \rightarrow R$ mit $D[f]$ ($= N$) bezeichnet und mit $f|_M$ die Restriktion von f auf die Menge M . Die Iterierten f^k ($k = 0, 1, 2, \dots$) von f werden in folgender Weise rekursiv definiert:

a) $f^0 := \text{id}$

b) $f^k := f \circ (f^{k-1}|_{D[f^k]})$ mit $D[f^k] := \{x \in D[f^{k-1}] \mid f^{k-1}(x) \in D[f]\}$ für $k = 1, 2, \dots$

SATZ B1. (Nguyen Huu Anh [17]) Es sei K eine nicht-
leere, abgeschlossene, konvexe Teilmenge von E . Die Abbil-
dung $f: K \rightarrow K$ sei vollstetig, und für eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ sei
 $f^m(K)$ beschränkt. Dann besitzt f mindestens einen Fixpunkt.

SATZ B2. (F. E. Browder [3]) Es sei S eine offene,
konvexe Teilmenge von E und $f: S \rightarrow E$ eine stetige Abbil-
dung, so daß $\overline{f(S)}$ kompakt ist. Es existiere eine Zahl $m \in \mathbb{N}$,
eine nichtleere, offene, konvexe Teilmenge S_1 von E und
eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge S_0 von E , so daß
gilt:

$$a) S_1 \subset D[f^m]$$

$$b) \bigcup_{j=0}^m f^j(S_0) \subset S_1$$

$$c) f^m(S_1) \subset S_0$$

Dann besitzt f mindestens einen Fixpunkt in S_0 .

Für den Fall $K = E$ wurde Satz B1 schon von F. E. Browder [3] bewiesen.

Das Hauptziel der vorliegenden Arbeit ist es, in den Sätzen B1 und B2 statt mit der Vollstetigkeit der Abbildung möglichst weitgehend schon mit der schwächeren Voraussetzung der Vollstetigkeit einer Iterierten der Abbildung auszukommen. Es ergab sich, daß es für die Existenz von Fixpunkten genügt, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$(0.1) \quad \left[\begin{array}{l} \text{Eine Primzahl-Iterierte } f^p \text{ des Operators } f \text{ ist} \\ \text{vollstetig.} \end{array} \right.$$

(0.2) f^P bildet K bzw. S_1 auf beschränkte Mengen ab.

(0.3) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Es gibt eine Umgebung } U \text{ (relativ zu } K \text{ im Falle} \\ \text{von Satz B1) der Menge der Fixpunkte von } f^P \text{ bzw.} \\ f^P\langle S_1 \rangle, \text{ so daß } f\langle U \rangle \text{ vollstetig ist. } U \text{ kann} \\ \text{beliebig klein sein.} \end{array} \right.$

In Satz B2 konnten zusätzlich noch einige andere Voraussetzungen geringfügig reduziert werden. Hierbei ist insbesondere eine Verallgemeinerung im Sinne des Rothereschen Fixpunktsatzes zu nennen.

Eine Verallgemeinerung von Satz B2 auf gewisse stetige, "asymptotisch kompakte" Operatoren (zur Definition von "asymptotisch kompakt" vgl. Anhang II) wurde von G. S. Jones ([11], asymptotic fixed-point theorem 2) angegeben - allerdings ohne Beweis. Auf diese Verallgemeinerung ließe sich Satz 1 und für wichtige Spezialfälle auch Satz 2 der vorliegenden Arbeit zurückführen.

Der Beweis der oben skizzierten Hauptsätze der vorliegenden Arbeit (Satz 1 und 2) wird mit Hilfe der Theorie des Abbildungsgrades geführt. Hierzu wird in Kapitel 2 das Lemma 1 formuliert, auf das sich die beiden Hauptsätze zurückführen lassen ²⁾:

²⁾ Die Menge der Fixpunkte einer Abbildung $f: M \rightarrow N$ wird mit $\mathcal{F}[f]$ bezeichnet, d.h. es ist $\mathcal{F}[f] := \{x \in M \mid x = f(x)\}$. Die Symbole $d[f, M, z]$ und $i[f, z]$ für Abbildungsgrad und Abbildungsindex wurden (geringfügig geändert) von E. Heinz [9] übernommen.

LEMMA 1. Es sei E ein Banachraum, N eine Teilmenge von E und M eine beschränkte, offene Teilmenge von E mit
 $\emptyset \neq \bar{M} \subset N$. Die Abbildung $g: N \rightarrow E$ erfülle für eine Primzahl p
die Voraussetzungen

(0.4) Es ist $\bar{M} \subset D[g^P]$, und $g^P(\bar{M})$ ist vollstetig.

(0.5) $g(\bar{M})$ ist vollstetig.

(0.6) $\mathcal{F}[g^P(\bar{M})] = g(\mathcal{F}[g^P(\bar{M})]) \subset M$

(0.7) $d[id - g^P, M, 0] \neq 0 \pmod p$

Dann besitzt g mindestens einen Fixpunkt $x \in M$.

Der Beweis von Lemma 1 hat als wichtige Grundlage eine einfache Aussage aus der Matrizenrechnung: Sind G und B n -reihige, quadratische Matrizen und I die n -reihige Einheitsmatrix, so ist $\det(I - GB) = \det(I - BG)$. Damit wird für beliebige $m, n \in \mathbb{N}$ und Abbildungen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ aus $C^1(\mathbb{R}^n)$ bewiesen, daß der Abbildungsindex der Abbildung $id - f^m$ in einem Punkt $x \in \mathcal{F}[f^m]$ derselbe ist wie in den Punkten $f(x), f^2(x), \dots, f^{m-1}(x)$, falls die Funktionaldeterminante von $id - f^m$ im Punkte x von Null verschieden ist.

Der Grundgedanke des Beweises läßt sich nun folgendermaßen beschreiben:

Eine stetig differenzierbare Abbildung $g_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ besitze auf einer gewissen beschränkten Menge $T = \bar{T} \subset \mathbb{R}^n$ die folgenden Eigenschaften:

(0.8) $\mathcal{F}[g_1^P(T)] = g_1(\mathcal{F}[g_1^P(T)]) \subset \bar{T}$

$$(0.9) \quad \left[\begin{array}{l} \mathcal{F}[g_1^P\langle T \rangle] \text{ besteht aus isolierten Punkten, in} \\ \text{denen die Funktionaldeterminante von } \text{id} - g_1^P \\ \text{von Null verschieden ist.} \end{array} \right.$$

$$(0.10) \quad d[\text{id} - g_1^P, T, 0] \not\equiv 0 \pmod{p}$$

Wegen (0.9) ist dann

$$d[\text{id} - g_1^P, T, 0] = \sum_{x_k \in \mathcal{F}[g_1^P\langle T \rangle]} i[\text{id} - g_1^P, x_k],$$

wobei die Indizes $i[\text{id} - g_1^P, x_k]$ nur die Werte $+1$ und -1 annehmen können. Aus (0.8) folgt, daß $\{x, g_1(x), \dots, g_1^{p-1}(x)\} \subset \mathcal{F}[g_1^P\langle T \rangle]$ ist für alle $x \in \mathcal{F}[g_1^P\langle T \rangle]$. Die Menge $\mathcal{F}[g_1^P\langle T \rangle] \setminus \mathcal{F}[g_1\langle T \rangle]$ läßt sich somit aufspalten in endlich viele disjunkte "Zyklen" $Z_x := \{x, g_1(x), \dots, g_1^{p-1}(x)\}$, die jeweils genau p Punkte enthalten (p Primzahl!). Jeder einzelne dieser Zyklen liefert einen Beitrag $+p$ oder $-p$ zum Abbildungsgrad $d[\text{id} - g_1^P, T, 0]$ (da ja die Abbildungsindizes innerhalb eines Zyklus konstant sind), so daß insgesamt der Anteil der Punkte aus $\mathcal{F}[g_1^P\langle T \rangle] \setminus \mathcal{F}[g_1\langle T \rangle]$ am Abbildungsgrad ein ganzzahliges Vielfaches von p ist. Wegen (0.10) kann deshalb $\mathcal{F}[g_1\langle T \rangle]$ nicht leer sein.

Damit man beim Beweis von Lemma 1 auf diese Methode zurückgreifen kann, sind technisch schwierige Umformungen nötig. Dabei geht man von der Annahme aus, daß die Abbildung g , welche die Voraussetzungen von Lemma 1 erfüllt, keinen Fixpunkt $x \in M$ besitzt, und konstruiert daraus einen Widerspruch. Hierzu wird g schrittweise durch Operatoren mit endlichdimensionalem Wertebereich approximiert. Man kann dann auf einen Euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ übergehen und gewinnt schließlich eine solche stetig differenzierbare Abbildung

$g_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, die auf einer gewissen beschränkten Menge T (mit $\emptyset \neq T = \bar{T} \subset \mathbb{R}^n$) die Eigenschaften $\mathcal{F}[g_1\langle T \rangle] = \emptyset$, (0.8), (0.9) und (0.10) besitzt, was nach dem obigen Abschnitt einen Widerspruch bedeutet. Dabei genügt es, die Approximationen genügend genau zu wählen, um aus $\mathcal{F}[g\langle M \rangle] = \emptyset$, (0.6) und (0.7) abzuleiten, daß g_1 die Bedingungen $\mathcal{F}[g_1\langle T \rangle] = \emptyset$, (0.8) und (0.10) erfüllt. Wesentlich mehr Schwierigkeiten bereitet der Beweis, daß sich (0.9) erreichen läßt. Im Grundprinzip wird hierbei auf die bei Ch. Loewner [15] (Seite 318 - 319), G. de Rham [18] (Seite 96) und E. Heinz [9] (Lemma 6) verwendete Beweismethode zurückgegriffen, die sich auf das Sardsche Lemma (A. Sard [21]) stützt. Es treten aber im vorliegenden Falle beträchtliche Komplikationen auf, die dadurch entstehen, daß man die eventuell nötige (die Bedingung (0.9) erfüllende) Abänderung der Abbildung nicht direkt angeben kann, sondern etwas mühsam schrittweise konstruieren muß.

Es besteht gewisse Aussicht, daß die in der vorliegenden Arbeit dargestellten Methoden sich weiterentwickeln lassen zu einem Konzept, mit dem sich auch Fixpunktsätze für Operatoren, die nicht die Bedingung (0.3) erfüllen, beweisen lassen. Damit wäre im wesentlichen eine Abbildungsgradtheorie für die "asymptotisch kompakten Operatoren" (nach der Definition von G. S. Jones [11]) geschaffen.

An dieser Stelle möchte ich allen danken, welche die Anfertigung dieser Arbeit ermöglichten und unterstützten. Insbesondere danke ich Herrn Professor Dr. E. Wienholtz für viele wertvolle Anregungen.

1. Die Hauptsätze

Zur Formulierung der Hauptsätze ist es günstig, zunächst folgende häufig verwendete Abkürzung einzuführen:

Für eine Teilmenge M eines metrischen Raumes R sei

$$(1.1) \quad M^{\epsilon} := \begin{cases} \{x \in R \mid \text{dist}(x, M) \leq \epsilon\} & \text{für } M \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{für } M = \emptyset. \end{cases}$$

Bei Fixpunktmengen $\mathcal{F}[f]$ wird statt $(\mathcal{F}[f])^{\epsilon}$ noch kürzer $\mathcal{F}^{\epsilon}[f]$ geschrieben.

In dieser Arbeit werden insbesondere die beiden folgenden Hauptsätze bewiesen:

SATZ 1. Es sei E ein Banachraum und K eine nichtleere, konvexe, abgeschlossene Teilmenge von E . Die Abbildung $f: K \rightarrow K$ erfülle für eine gewisse Primzahl p und ein $\epsilon > 0$ die Voraussetzungen

$$(1.2) \quad f^p \text{ ist vollstetig und } f^p(K) \text{ beschränkt.}$$

$$(1.3) \quad f(\mathcal{F}^{\epsilon}[f^p] \cap K) \text{ ist vollstetig.}$$

Dann besitzt f mindestens einen Fixpunkt $x \in K$.

SATZ 2. K_1 und K_2 seien Teilmengen eines Banachraumes E . Es sei K_1 offen und konvex und $\emptyset \neq \overline{K_1} \subset K_2$. Die Abbildung $f: K_2 \rightarrow E$ erfülle für eine gewisse Primzahl p und ein $\epsilon > 0$ die Voraussetzungen

$$(1.4) \quad \overline{K_1} \subset D[f^p]$$

$$(1.5) \quad f^p(\overline{K_1}) \text{ ist vollstetig.}$$

(1.6) $\left[\begin{array}{l} \text{Es existiert ein } x_0 \in K_1, \text{ so da\ss} \\ K_1 \cap \text{co}[\{x_0\} \cup f^P(K_1)] \text{ beschr\"ankt und} \\ \{x \in \partial K_1 \mid \exists \lambda > 1: f^P(x) - x_0 = \lambda(x - x_0)\} = \emptyset \text{ ist.} \end{array} \right.$

(1.7) $\mathfrak{F}[f^P(\overline{K_1})] \cup f(\mathfrak{F}[f^P(\overline{K_1})]) \subset K_1$

(1.8) $f \circledast [f^P(\overline{K_1})] \cap K_2 \text{ ist vollstetig.}$

Dann besitzt f mindestens einen Fixpunkt $x \in K_1$.

Zu Satz 2 ist zu bemerken, da\ss (1.6) die sch\"arferen Voraussetzungen

(1.6') Es ist $f^P(K_1)$ beschr\"ankt und $f^P(\partial K_1) \subset \overline{K_1}$.

und

(1.6'') Es ist $f^P(K_1)$ beschr\"ankt und $f^P(\overline{K_1}) \subset \overline{K_1}$.

umfa\ss t. Eine der Voraussetzung (1.6) \\"ahnliche Bedingung findet man bei P. P. Zabreiko - M. A. Krasnosel'skiĭ [25].

Es folgen noch einige weitere einfache Bemerkungen zu diesen S\"atzen, die zum Teil im Beweis entscheidend benutzt werden:

I) Zu Satz 1:

\alpha) Aus $f: K \rightarrow K$ folgt die Beziehung

(1.9) $K \supset f(K) \supset f^2(K) \supset \dots,$

denn aus $f(K) \subset K$ erh\"alt man $f^n(K) = f^{n-1}(f(K)) \subset f^{n-1}(K)$ f\"ur alle $n \in \mathbb{N}$.

\beta) Falls $f^m(K)$ beschr\"ankt ist f\"ur ein $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, ist wegen (1.9) auch $f^n(K)$ beschr\"ankt f\"ur alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > m$. Da nach (1.2) $f^P(K)$ beschr\"ankt ist, gibt es ein

minimales $m_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ($m_1 \leq p$), so daß $f^m(K)$ genau für die ganzzahligen $m \geq m_1$ beschränkt ist.

γ) Entsprechend ist f^s vollstetig für alle $s \in \mathbb{N}$ mit $s > r$, falls f stetig und f^r vollstetig für ein $r \in \mathbb{N}$ ist.

Beweis: Es sei M beschränkt, $M \subset K$. Dann ist $\overline{f^r(M)}$ kompakt und folglich wegen der Stetigkeit von f auch $\overline{f^s(M)} = f^{s-r}(\overline{f^r(M)})$ kompakt. q.e.d.

Da nach (1.2) f^p vollstetig ist, gibt es also, wenn f auf ganz K stetig ist, ein minimales $m_2 \in \mathbb{N}$ ($m_2 \leq p$), so daß f^m genau für die ganzzahligen $m \geq m_2$ vollstetig ist.

δ) Die triviale Beziehung

$$(1.10) \quad \mathfrak{F}[f^m] \subset \mathfrak{F}[f^{mn}] \text{ für alle } m, n \in \mathbb{N}$$

macht verständlich, daß in den Voraussetzungen zu Satz 1 die Beschränkung auf Primzahlen p nicht wesentlich ist, falls die Stetigkeit von f auf ganz K vorausgesetzt wird. Denn wenn f^m ($m \in \mathbb{N}$) die in (1.2) und (1.3) für f^p geforderten Eigenschaften hat, so ist nur wichtig, daß m einen Primfaktor $p_0 \geq \max[m_1, m_2]$ enthält, weil dann nach (1.10) und den Bemerkungen β) und γ) auch f^{p_0} die Bedingungen (1.2) und (1.3) erfüllt.

ε) Die Stetigkeit von f^p und die Abgeschlossenheit von K haben zur Folge, daß $\mathfrak{F}[f^p]$ abgeschlossen ist. Somit gilt

$$(1.11) \quad \mathfrak{F}[f^p] \text{ kompakt,}$$

denn aus (1.10) erhält man

$$\mathfrak{F}[f^p] \subset \mathfrak{F}[f^{2p}] \subset f^{2p}(K) \subset \overline{f^p(f^p(K))}, \text{ wobei } \overline{f^p(f^p(K))} \text{ nach (1.2) eine kompakte Menge ist.}$$

ζ) Eine wichtige Eigenschaft der Mengen $\mathcal{F}[f^m]$ ist ihre Invarianz bzgl. f , d.h. es gilt

$$(1.12) \quad f(\mathcal{F}[f^m]) = \mathcal{F}[f^m] \text{ für alle } m \in \mathbb{N}.$$

Beweis: Für alle $x \in \mathcal{F}[f^m]$ gilt $f(x) = f(f^m(x)) = f^m(f(x))$, d.h. es ist $f(x) \in \mathcal{F}[f^m]$ und somit $f(\mathcal{F}[f^m]) \subset \mathcal{F}[f^m]$. Daraus folgt (vgl. den Beweis von (1.9)) $f^m(\mathcal{F}[f^m]) \subset f^{m-1}(\mathcal{F}[f^m]) \subset \dots \subset f(\mathcal{F}[f^m]) \subset \mathcal{F}[f^m]$. Wegen $f^m(\mathcal{F}[f^m]) = \mathcal{F}[f^m]$ ist deshalb $f(\mathcal{F}[f^m]) = \mathcal{F}[f^m]$. q.e.d.

II) Zu Satz 2:

α) Aus der Stetigkeit von $f^P(\overline{K_1})$ folgt, daß $\mathcal{F}[f^P(\overline{K_1})]$ abgeschlossen ist. Da nach (1.7) $\mathcal{F}[f^P(\overline{K_1})] = \mathcal{F}[f^P(K_1)]$ ist, erhält man $\mathcal{F}[f^P(\overline{K_1})] = \mathcal{F}[f^P(K_1)] = f^P(\mathcal{F}[f^P(K_1)]) \subset f^P(K_1 \cap f^P(K_1)) \subset \overline{f^P(K_1 \cap \text{co}[\{x_0\} \cup f^P(K_1)])}$, was nach (1.5) und (1.6) kompakt ist. Somit ist auch $\mathcal{F}[f^P(\overline{K_1})]$ kompakt.

β) Eine (1.12) entsprechende Invarianzeigenschaft gilt auch für $\mathcal{F}[f^P(\overline{K_1})]$:

$$(1.13) \quad f(\mathcal{F}[f^P(\overline{K_1})]) = \mathcal{F}[f^P(\overline{K_1})].$$

Für alle $x \in \mathcal{F}[f^P(\overline{K_1})]$ ist nämlich $f(x) = f(f^P(x)) = f^P(f(x))$ und somit $f(x) \in \mathcal{F}[f^P]$. Wegen $f(x) \in f(\mathcal{F}[f^P(\overline{K_1})]) \subset K_1$ (letzteres nach (1.7)) gilt sogar $f(x) \in \mathcal{F}[f^P(\overline{K_1})]$, d.h. es ist $f(\mathcal{F}[f^P(\overline{K_1})]) \subset \mathcal{F}[f^P(\overline{K_1})]$. Analog wie im Beweis von (1.12) schließt man daraus auf (1.13).

Die Sätze 1 und 2 sind Verallgemeinerungen der in der Einleitung zitierten Sätze B1 und B2 von Nguyen Huu Anh und F. E. Browder. Dies ist für Satz 1 leicht einzusehen, bei Satz 2 allerdings nicht ganz einfach zu beweisen.

Im folgenden wird aber mit Satz 4 ein Spezialfall von Satz 2 angegeben, bei dem man ohne Schwierigkeiten zeigen kann, daß er Satz B2 verallgemeinert.

Zusammen mit Satz 4 werden noch die Sätze 3 und 5 als zwei weitere Spezialfälle der Hauptsätze angegeben. Die Sätze 3, 4 und 5 sind so angelegt, daß in den Voraussetzungen die schwer erfaßbaren Mengen $\mathcal{F}[f^p]$ bzw. $\mathcal{F}[f^p(\overline{K_1})]$ nicht mehr vorkommen. Dafür muß allerdings die Vollstetigkeit des Operators auf einer größeren Menge als bei Satz 1 bzw. 2 verlangt werden. Es ist jedoch noch nicht die globale Vollstetigkeit nötig wie bei Satz B1 und B2.

SATZ 3. Es sei E ein Banachraum und K eine nichtleere, abgeschlossene, konvexe Teilmenge von E. Die Abbildung $f: K \rightarrow K$ sei stetig, und es existiere ein $m \in \mathbb{N}$ und eine beschränkte, relativ zu K offene Menge M, so daß gilt:

$$(1.14) \quad f^m(K) \subset M$$

$$(1.15) \quad f(M) \text{ ist vollstetig.}$$

Dann besitzt f mindestens einen Fixpunkt $x \in K$.

Wegen (1.14) ist übrigens dann sogar $\mathcal{F}[f(M)] (= \mathcal{F}[f]) \neq \emptyset$!

Satz 3 ist ein Spezialfall von Satz 1, denn es gilt:

Es sei p eine Primzahl mit $p > m$. Nach (1.9) und (1.14) ist $f^{p-1}(K) \subset f^m(K) \subset M$ und folglich $\overline{f^p(K)} = \overline{f(f^{p-1}(K))} \subset \overline{f(M)}$. Wegen (1.15) ist somit $\overline{f^p(K)}$ kompakt, d.h. f erfüllt die Bedingung (1.2).

Nach Voraussetzung existiert eine offene Menge M_0 , so daß $M = M_0 \cap K$ ist. Die Menge $\mathcal{F}[f^p]$ ist abgeschlossen, da

f^p stetig und K abgeschlossen ist. Außerdem gilt $\mathcal{F}[f^p] \subset \subset f^p(K) \subset \overline{f(M)}$. Damit ist $\mathcal{F}[f^p]$ als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge $\overline{f(M)}$ kompakt. Andererseits ist nach (1.9) und (1.14) $\mathcal{F}[f^p] \subset f^p(K) \subset f^m(K) \subset M \subset M_0$. Da $\mathcal{F}[f^p]$ kompakt und M_0 offen ist, existiert also ein $\epsilon > 0$, so daß $\mathcal{F}^\epsilon[f^p] \subset M_0$ ist. Wegen (1.15) ist dann f auf $\mathcal{F}^\epsilon[f^p] \cap K$ ($\subset M_0 \cap K = M$) vollstetig. q.e.d.

Spezialfälle von Satz 2 sind die beiden folgenden äquivalenten Sätze:

SATZ 4. K_0, K_1 und K_2 seien Teilmengen eines Banach-
raumes E . K_0 sei offen und beschränkt, K_1 offen und konvex,
und es gelte $\emptyset \neq K_0 \subset K_1 \subset K_2$. Die Abbildung $f: K_2 \rightarrow E$ sei
stetig, und es existiere ein $m \in \mathbb{N}$, so daß gilt:

$$(1.16) \quad K_1 \subset D[f^m]$$

$$(1.17) \quad f(K_0) \text{ ist vollstetig.}$$

$$(1.18) \quad f^m(K_1) \subset K_0$$

$$(1.19) \quad \overline{f^m(K_1)} \cup \bigcup_{i=m+1}^{\infty} f^i(K_1) \subset K_1$$

Dann besitzt f mindestens einen Fixpunkt $x \in K_0$.

SATZ 5. K_1 und K_2 seien Teilmengen eines Banachraumes E
mit $\emptyset \neq K_1 \subset K_2$. K_1 sei zudem offen und konvex. Die Abbil-
dung $f: K_2 \rightarrow E$ sei stetig, und es existiere eine offene,
beschränkte Teilmenge K_0 von K_2 und eine Frimzahl p , so daß
gilt:

$$(1.20) \quad K_1 \subset D[f^p]$$

$$(1.21) \quad f(K_0) \text{ ist vollstetig.}$$

$$(1.22) \quad f^{p-1}(K_1) \subset K_0$$

$$(1.23) \quad \overline{f^p(K_1)} \subset K_1$$

$$(1.24) \quad f^{p+1}(K_1) \subset K_1$$

Dann besitzt f mindestens einen Fixpunkt $x \in K_0 \cap K_1$.

Zu Satz 4 ist zu bemerken, daß man ohne Einschränkung der Allgemeinheit (1.18) und (1.19) durch die scheinbar schärferen Voraussetzungen

$$(1.25) \quad \overline{f^m(K_1)} \subset K_0$$

und

$$(1.26) \quad \bigcup_{i=m+1}^{\infty} f^i(K_1) \subset K_0$$

ersetzen kann.

Es gilt nämlich mit $m' := 3m+1$, falls die Voraussetzungen von Satz 4 erfüllt sind:

α) Aus (1.16) und $f^m(K_1) \subset K_0 \subset K_1$ folgt $K_1 \subset D[f^i]$ für alle $i \in \mathbb{N}$. (Dies wurde schon bei der Formulierung von (1.19) benützt.)

β) Wegen $f^{2m}(K_1) = f^m(f^m(K_1)) \subset f^m(K_1) \subset K_0$ ist nach (1.17) $\overline{f^{2m+1}(K_1)}$ kompakt. Da zudem $\overline{f^{2m+1}(K_1)} = \overline{f^m(f^{m+1}(K_1))} \subset \overline{f^m(K_1)} \subset K_1$ ist, gilt $\overline{f^{m'}(K_1)} = \overline{f^m(f^{2m+1}(K_1))} = \overline{f^m(f^{2m+1}(K_1))} \subset \overline{f^m(K_1)} \subset K_0$.

γ) Für $i \geq m' + 1 = 3m + 2$ ist wegen $i - m \geq 2m + 2 > m$ nach (1.18) und (1.19) $f^i(K_1) = f^m(f^{i-m}(K_1)) \subset f^m(K_1) \subset K_0$.

Aus α), β) und γ) folgt: Mit m' an Stelle von m sind die Voraussetzungen (1.16), (1.17) (trivial), (1.25) und (1.26) erfüllt. q.e.d.

Beweis der Äquivalenz von Satz 4 und Satz 5:

a) Es seien die Voraussetzungen von Satz 5 erfüllt, und es sei $m := p^2$. Dann gilt:

α) Es ist $K_1 \subset D[f^i]$ für alle $i \in \mathbb{N}$ wegen (1.20) und (1.23).

β) Für alle $i \geq m$ gibt es Zahlen $j, r \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq j \leq p-1$ und $r \geq p$, so daß $i = rp + j = (r-j)p + j(p+1)$ ist. Dann folgt aus (1.23) und (1.24) $f^i(K_1) = f^{rp+j}(K_1) = f^{(r-j)p}(f^{j(p+1)}(K_1)) \subset f^{(r-j)p}(K_1) \subset K_1$.

γ) Es ist $\overline{f^m(K_1)} = \overline{f^{p^2}(K_1)} = \overline{f^p(f^{(p-1)p}(K_1))} \subset \overline{f^p(K_1)} \subset K_1$.

δ) Nach (1.22), (1.23) und (1.24) ist $f^m(K_1) = f^{p-1}(f^{p^2-p+1}(K_1)) = f^{p-1}(f^{(p-2)p}(f^{p+1}(K_1))) \subset f^{p-1}(f^{(p-2)p}(K_1)) \subset f^{p-1}(K_1) \subset K_0$ und wegen γ) sogar $f^m(K_1) \subset K_0 \cap K_1 =: K_0'$. (Damit ist auch $K_0' \neq \emptyset$.)

Setzt man in Satz 4 K_0' an Stelle von K_0 ein, während die übrigen Bezeichnungen beibehalten werden, so sind nach α), β), γ) und δ) alle Voraussetzungen von Satz 4 erfüllt.

b) Es seien die Voraussetzungen von Satz 4 erfüllt. p sei eine Primzahl mit $p \geq 2m+1$. Dann gilt:

α) Wegen (1.16) und (1.18) ist $K_1 \subset D[f^i]$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

β) Da $p-m-1 \geq m$ ist, folgt aus (1.18) und (1.19) $f^{p-1}(K_1) = f^m(f^{p-m-1}(K_1)) \subset f^m(K_1) \subset K_0$.

γ) Es ist $\overline{f^p(K_1)} = \overline{f^m(f^{p-m}(K_1))} \subset \overline{f^m(K_1)} \subset K_1$ nach (1.19).

Damit sind unter Beibehaltung aller Bezeichnungen die Voraussetzungen von Satz 5 erfüllt. q.e.d.

Beweis, daß die Sätze 4 und 5 Spezialfälle von Satz 2 sind:

Wegen der Äquivalenz der Sätze 4 und 5 genügt es zu zeigen, daß Satz 5 aus Satz 2 folgt.

Es seien die Voraussetzungen von Satz 5 erfüllt. Für $\epsilon > 0$ sei

$$\epsilon K_1 := \begin{cases} \{x \in K_1 \mid \text{dist}(x, \partial K_1) > \epsilon\} & \text{für } \partial K_1 \neq \emptyset \\ K_1 & \text{für } \partial K_1 = \emptyset. \text{ (In diesem Falle ist } K_1 = E.) \end{cases}$$

Es ist ϵK_1 offen und konvex, und es gilt $\overline{\epsilon K_1} \subset K_1$. Dies ist für $\partial K_1 = \emptyset$, d.h. $\epsilon K_1 = K_1 = E$ trivial, während für $\partial K_1 \neq \emptyset$ gilt:

a) Für alle $x \in \epsilon K_1$ ist $\epsilon_x := \text{dist}(x, \partial K_1) > \epsilon$, und somit gilt für alle $y \in K(x, \delta)$ ($\delta \in (0, \epsilon_x - \epsilon)$):

$$\text{dist}(y, \partial K_1) \geq \text{dist}(x, \partial K_1) - \|x - y\| \geq \epsilon_x - \delta > \epsilon_x - \epsilon_x + \epsilon = \epsilon.$$

ϵK_1 ist also offen.

b) Es seien $x_0, x_1 \in \epsilon K_1$. Zum Nachweis, daß ϵK_1 konvex ist, muß man zeigen, daß $x_t := (1-t)x_0 + tx_1 \in \epsilon K_1$ ist für alle $t \in (0, 1)$. Nach der Definition von ϵK_1 ist

$$(1.27) \quad \epsilon_0 := \min[\text{dist}(x_0, \partial K_1), \text{dist}(x_1, \partial K_1)] > \epsilon.$$

Da K_1 konvex ist und die Kugeln $K(x_0, \epsilon_0)$ und $K(x_1, \epsilon_0)$ in $\overline{K_1}$ liegen, ist auch $K(x_t, \epsilon_0) \subset \overline{K_1}$ für alle $t \in (0, 1)$, also nach (1.27) $x_t \in \epsilon K_1$.

c) $\overline{\epsilon K_1} \subset K_1$ folgt trivial aus der Definition von ϵK_1 .

Nach (1.21) und (1.22) ist $\overline{f^P(K_1)}$ kompakt. Wegen

$$(1.28) \quad \mathcal{F}[f^P(K_1)] \subset f^P(K_1)$$

ist also $\mathfrak{F}[f^P(K_1)]$ kompakt, falls $\mathfrak{F}[f^P(K_1)]$ abgeschlossen ist. Letzteres folgt aber sofort aus der Stetigkeit von f^P auf $\overline{f^P(K_1)}$ und aus $\mathfrak{F}[f^P(K_1)] = \mathfrak{F}[f^P(\overline{f^P(K_1)})]$ (nach (1.28) und (1.23)). Damit ist auch $M := \overline{f^P(K_1)} \cup f(\mathfrak{F}[f^P(K_1)])$ kompakt. Wegen (1.28) ist $M \subset \overline{f^P(K_1)} \cup f(f^P(K_1)) = \overline{f^P(K_1)} \cup f^{P+1}(K_1)$. Unter Berücksichtigung von (1.23) und (1.24) erhält man daraus $M \subset K_1$. Es folgt, daß die Zahl

$$(1.29) \quad \eta := \begin{cases} \frac{1}{2} \text{dist}(M, \partial K_1) & \text{für } \partial K_1 \neq \emptyset \\ 1 & \text{für } \partial K_1 = \emptyset \end{cases}$$

größer als Null ist. Die Menge η_{K_1} ist nicht leer, da sie wegen (1.29) die nichtleere Menge $\overline{f^P(K_1)}$ enthält. Wie oben gezeigt wurde, ist η_{K_1} offen und konvex, und es gilt $f^P(\eta_{K_1}) \subset f^P(K_1) \subset \eta_{K_1} \subset \overline{\eta_{K_1}} \subset K_1 \subset K_2$.

Es folgt insbesondere:

a) Es ist $\overline{\eta_{K_1}} \subset D[f^P]$.

b) $\overline{f^P(\eta_{K_1})} (\subset \overline{f^P(K_1)})$ ist kompakt und $f^P(\overline{\eta_{K_1}}) \subset \overline{\eta_{K_1}}$.

c) Wegen $f^P(K_1) \subset \eta_{K_1}$ ist $\mathfrak{F}[f^P(\overline{\eta_{K_1}})] = \mathfrak{F}[f^P(K_1)]$. Aus (1.28) und (1.29) folgt dann

$$\mathfrak{F}[f^P(\overline{\eta_{K_1}})] \cup f(\mathfrak{F}[f^P(\overline{\eta_{K_1}})]) = \mathfrak{F}[f^P(K_1)] \cup f(\mathfrak{F}[f^P(K_1)]) \subset \overline{f^P(K_1)} \cup f(f^P(K_1)) \subset M \subset \eta_{K_1}.$$

d) Nach (1.28) ist $f^P(\mathfrak{F}[f^P(K_1)]) \subset f^P(f^P(K_1))$ und nach (1.22) und (1.24) $f^{P-1}(f^{P+1}(K_1)) \subset f^{P-1}(K_1) \subset K_0$. Somit gilt $\mathfrak{F}[f^P(\overline{\eta_{K_1}})] = \mathfrak{F}[f^P(K_1)] = f^P(\mathfrak{F}[f^P(K_1)]) \subset f^P(f^P(K_1)) = f^{P-1}(f^{P+1}(K_1)) \subset K_0$.

Da $\mathfrak{F}[f^P(\overline{\eta_{K_1}})]$ kompakt und K_0 offen ist, existiert ein $\epsilon > 0$, so daß $\mathfrak{F}^\epsilon[f^P(\overline{\eta_{K_1}})] \subset K_0$ ist. Wegen (1.21) ist somit $f(\mathfrak{F}^\epsilon[f^P(\overline{\eta_{K_1}})] \cap K_2) (= f(\mathfrak{F}^\epsilon[f^P(\overline{\eta_{K_1}})]))$ vollstetig.

Ersetzt man in Satz 2 K_1 durch ηK_1 , während die übrigen Bezeichnungen beibehalten werden, so sind nach α), β), γ) und δ) alle Voraussetzungen des Satzes erfüllt ((1.6) sogar in der verschärften Form (1.6")).

Aus Satz 2 folgt dann die Existenz eines Fixpunktes $x \in \eta K_1 \subset K_1$, der wegen (1.22) sogar in $K_0 \cap K_1$ liegen muß.
q.e.d.

2. Ein Lemma, auf das die Hauptsätze zurückgeführt werden können

Eine wesentliche Rolle beim Beweis der Sätze 1 und 2 spielt der Abbildungsgrad. In Anlehnung an E. Heinz [9] wird hierfür die Abkürzung $d[h, G, z]$ verwendet, wobei für h , G und z vorausgesetzt wird:

- a) G ist eine beschränkte, offene Teilmenge eines Banachraumes E oder die Abschließung einer solchen Menge.
- b) Es ist $z \in E$.
- c) Die Abbildung $(\text{id}\langle \bar{G} \rangle - h): \bar{G} \rightarrow E$ ist vollstetig, und es ist $z \notin h(\partial G)$.

Die Sätze 1 und 2 werden auf das schon in der Einleitung angegebene Lemma 1 zurückgeführt:

LEMMA 1. Es sei E ein Banachraum, N eine Teilmenge von E und M eine beschränkte, offene Teilmenge von E mit $\emptyset \neq \bar{M} \subset N$. Die Abbildung $g: N \rightarrow E$ erfülle für eine Primzahl p die Voraussetzungen

(0.4) Es ist $\bar{M} \subset D[g^P]$, und $g^P\langle \bar{M} \rangle$ ist vollstetig.

(0.5) $g\langle \bar{M} \rangle$ ist vollstetig.

(0.6) $\mathcal{F}[g^P\langle \bar{M} \rangle] = g(\mathcal{F}[g^P\langle \bar{M} \rangle]) \subset M$

(0.7) $d[\text{id} - g^P, M, 0] \not\equiv 0 \pmod{p}$

Dann besitzt g mindestens einen Fixpunkt $x \in M$.

Genau wie bei (1.12) und (1.13) kann man zeigen, daß (0.6) äquivalent ist zu

(0.6') $\mathcal{F}[g^P\langle \bar{M} \rangle] \cup g(\mathcal{F}[g^P\langle \bar{M} \rangle]) \subset M.$

Das Lemma 1 wird in Kapitel 3 und 4 bewiesen. In diesem Kapitel wird nur noch gezeigt, daß die Sätze 1 und 2 aus Lemma 1 folgen.

Beweis der Sätze 1 und 2 mit Hilfe von Lemma 1:

I. Es seien die Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt.

Die Abbildung $f_0: KU\mathfrak{F}^e[f^P] \rightarrow E$ sei in folgender Weise bestimmt: Es sei $f_0\langle K \rangle := f$ und $f_0\langle \mathfrak{F}^e[f^P] \rangle$ eine stetige Fortsetzung von $f\langle \mathfrak{F}^e[f^P] \cap K \rangle$ mit der Eigenschaft, daß

$$(2.1) \quad f_0(\mathfrak{F}^e[f^P]) \subset \text{co}[f(\mathfrak{F}^e[f^P] \cap K)]$$

ist. (Die Existenz einer solchen Abbildung wird durch das Theorem 4.1 aus J. Dugundji [5] gesichert.) Nach (2.1) ist $f_0(KU\mathfrak{F}^e[f^P]) = f_0(K) \cup f_0(\mathfrak{F}^e[f^P]) \subset f(K) \cup \text{co}[f(\mathfrak{F}^e[f^P] \cap K)] \subset KU\text{co}[f(K)] \subset KU\text{co}[K] = K$, also insbesondere

$$(2.2) \quad f_0(KU\mathfrak{F}^e[f^P]) \subset K.$$

Nach Lemma 5 (auf Seite 54) gibt es ein $\delta(\epsilon)$ mit $0 < \delta(\epsilon) \leq \epsilon$ und $f_0(\mathfrak{F}^{\delta(\epsilon)}[f^P]) \subset (f_0(\mathfrak{F}[f^P]))^\epsilon = (f(\mathfrak{F}[f^P]))^\epsilon = (\mathfrak{F}[f^P])^\epsilon = \mathfrak{F}^\epsilon[f^P]$ (vgl. (1.12)). Bestimmt man nach dem gleichen Schluß zu $\delta(\epsilon)$ ein $\delta(\delta(\epsilon))$ usw., so erhält man nach $p-1$ Schritten ein γ mit $0 < \gamma \leq \epsilon$, so daß gilt:

$$(2.3) \quad f_0^r(\mathfrak{F}^\gamma[f^P]) \subset \mathfrak{F}^\epsilon[f^P] \text{ für } r = 0, \dots, p-1.$$

Daraus folgt sofort

$$(2.4) \quad \mathfrak{F}^\gamma[f^P] \subset D[f_0^p].$$

(Nach (2.2) ist sogar $D[f_0^m] = KU\mathfrak{F}^e[f^P]$ für alle $m \in \mathbb{N}$.)

Zudem erhält man aus (2.3) die Stetigkeit von

$f_0^r(\mathfrak{F}^\gamma[f^P])$ für $r = 1, \dots, p$. Aus (1.3) und der Beschränk-

heit von $\mathcal{F}^e[f^p] \cap K$ (vgl. (1.11)) folgt, daß $\overline{f(\mathcal{F}^e[f^p] \cap K)}$ kompakt ist. Somit ist für $r = 1, \dots, p$ wegen $f_0^r(\mathcal{F}^y[f^p]) \subset f_0(\mathcal{F}^e[f^p]) \subset \text{co}[f(\mathcal{F}^e[f^p] \cap K)]$ (vgl. (2.1) und (2.3)) auch $\overline{f_0^r(\mathcal{F}^y[f^p])}$ kompakt. Insgesamt ergibt sich insbesondere:

(2.5) $f_0^r(\mathcal{F}^y[f^p])$ ist vollstetig für $r = 1, \dots, p$.

Wegen (2.2) besitzt f_0^p auf $\mathcal{F}^e[f^p] \setminus K$ keine Fixpunkte, woraus aufgrund von $f_0(K) = f$ folgt, daß $\mathcal{F}[f_0^p] = \mathcal{F}[f^p]$ und $f_0(\mathcal{F}[f_0^p]) = f(\mathcal{F}[f^p])$ ist. Mit (1.12) erhält man daraus ³⁾:

(2.6) $\mathcal{F}[f_0^p(\mathcal{F}^y[f^p])] = f_0(\mathcal{F}[f_0^p(\mathcal{F}^y[f^p])]) \subset \mathcal{F}^y[f^p]$.

Mit $M := \mathcal{F}^y[f^p]$, $N := K \cup \mathcal{F}^e[f^p]$ und $g := f_0$ sind somit nach (2.3) - (2.6) die Voraussetzungen von Lemma 1 mit Ausnahme von $\overline{M} \neq \emptyset$ und (0.7) nachgewiesen. Es bleibt zu zeigen, daß $\overline{M} \neq \emptyset$ und $d[\text{id} - f_0^p, \mathcal{F}^y[f^p], 0] \neq 0 \pmod p$ ist.

Die Menge $f_0^p(K \cup \mathcal{F}^y[f^p])$ ist beschränkt, denn $f_0^p(K) = f^p(K)$ ist beschränkt nach (1.2) und von der Menge $f_0^p(\mathcal{F}^y[f^p])$ wurde schon gezeigt, daß ihre Abschließung kompakt (und folglich beschränkt) ist. Es gibt also ein $\rho > 0$ mit

(2.7) $f_0^p(K \cup \mathcal{F}^y[f^p]) \cup \mathcal{F}^e[f^p] \subset K(0, \rho)$.

Es sei $K_0 := (K \cup \mathcal{F}^y[f^p]) \cap K(0, \rho)$. Aus (1.2) und (2.5) folgt recht einfach, daß $f_0^p(K_0)$ stetig ist. Man kann also nach J. Dugundji [5] eine stetige Fortsetzung h von $f_0^p(K_0)$

³⁾ Es ist $\mathcal{F}^y[f^p] :=$ Menge der inneren Punkte von $\mathcal{F}^y[f^p]$. Entsprechend wird an späterer Stelle die Menge der inneren Punkte einer Kugel $K(x, \rho)$ mit $\mathring{K}(x, \rho)$ bezeichnet.

auf $K(O, \rho)$ definieren, so daß

$$(2.8) \quad h(K(O, \rho)) \subset \text{co}[f_0^P(K_0)]$$

ist. $f_0^P(K_0)$ ist wegen (2.7) eine Teilmenge von $K(O, \rho)$ und wegen (1.9) und (2.2) auch in K enthalten. Mit (2.8) erhält man somit

$$h(K(O, \rho)) \subset \text{co}[f_0^P(K_0)] \subset \text{co}[K \cap K(O, \rho)] = K \cap K(O, \rho),$$

d.h. es ist

$$(2.9) \quad h(K(O, \rho)) \subset K \cap K(O, \rho).$$

Deshalb liegen alle Fixpunkte von h in $K \cap K(O, \rho)$. Wegen

$$h(K \cap K(O, \rho)) = f_0^P(K \cap K(O, \rho)) = f^P(K \cap K(O, \rho)) \text{ und}$$

$\mathfrak{F}[f^P] \subset K \cap K(O, \rho)$ ist folglich

$$(2.10) \quad \mathfrak{F}[h] = \mathfrak{F}[f^P].$$

Nach (1.2) und (2.5) ist $f_0^P(K_0)$ vollstetig. Es ist also $\overline{f_0^P(K_0)}$ und damit auch $\overline{\text{co}[f_0^P(K_0)]}$ kompakt. Mit (2.8) folgt, daß h vollstetig ist.

Da wegen $\mathfrak{F}^e[f^P] \subset K(O, \rho)$ zudem $\mathfrak{F}[h] \cap \partial K(O, \rho) =$

$(= \mathfrak{F}[f^P] \cap \partial K(O, \rho)) = \emptyset$ ist, existiert der Abbildungsgrad

$d[\text{id} - h, K(O, \rho), 0]$, der wegen der Homotopie von $\text{id} - h$ und id den Wert 1 hat. Unter Berücksichtigung von (2.10) erhält

man somit $\overline{M} \supset M := \mathfrak{F}^Y[f^P] \supset \mathfrak{F}[f^P] = \mathfrak{F}[h] \not\subset \emptyset$ und

$$\begin{aligned} d[\text{id} - f_0^P, \mathfrak{F}^Y[f^P], 0] &= d[\text{id} - h, \mathfrak{F}^Y[f^P], 0] = d[\text{id} - h, \mathfrak{F}^Y[h], 0] = \\ &= d[\text{id} - h, K(O, \rho), 0] = 1 \not\equiv 0 \pmod{p}. \end{aligned}$$

Damit ist nachgewiesen, daß die Voraussetzungen von

Lemma 1 erfüllt sind. Aus Lemma 1 folgt $\mathfrak{F}[f_0] \not\subset \emptyset$, was wegen

(2.2) gleichbedeutend ist mit $\mathfrak{F}[f] \not\subset \emptyset$. q.e.d.

II. Es seien die Voraussetzungen von Satz 2 erfüllt. Definiert man $M := \mathfrak{F}^e[f^P(\overline{K_1})] \cap K_1$, $N := K_2$ und $g := f$, so gelten dann auch die Voraussetzungen von Lemma 1, wobei der Nachweis hierfür mit Ausnahme von $\overline{M} \neq \emptyset$, (0.6) und (0.7) trivial ist.

Bei Bedingung (0.6) beachtet man, daß natürlich $\mathfrak{F}[f^P(\overline{K_1})] = \mathfrak{F}[f^P(\overline{\mathfrak{F}^e[f^P(\overline{K_1})] \cap K_1})] = \mathfrak{F}[f^P(\overline{M})] = \mathfrak{F}[g^P(\overline{M})]$ ist, woraus mit Hilfe von (1.7) und (1.13) sofort (0.6) folgt.

Daß auch die Voraussetzungen $\overline{M} \neq \emptyset$ und (0.7) erfüllt sind, erhält man als direkte Konsequenz des folgenden Lemmas 2, wenn man $S = K_1$ und $h = f^P(\overline{K_1})$ setzt und für S_0 die Menge $M := \mathfrak{F}^e[f^P(\overline{K_1})] \cap K_1$ nimmt. (Die Voraussetzungen von Lemma 2 sind wegen (1.5) und (1.6) erfüllt!)

LEMMA 2. Es sei S eine nichtleere, offene, konvexe Teilmenge eines Banachraumes E. Die Abbildung $h: \overline{S} \rightarrow E$ sei vollstetig, und

$$(2.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{es existiere ein } x_0 \in S, \text{ so daß} \\ S \cap \text{co}[\{x_0\} \cup h(S)] \text{ beschränkt und} \\ \{x \in \partial S \mid \exists \lambda > 1: h(x) - x_0 = \lambda(x - x_0)\} = \emptyset \text{ ist.} \end{array} \right.$$

- a) Dann besitzt h mindestens einen Fixpunkt $x \in \overline{S}$.
 b) Für alle beschränkten, offenen Teilmengen S_0 von S mit $\mathfrak{F}[h] \subset S_0$ ist $d[\text{id} - h, S_0, 0] = 1$.

Bemerkung: Im Falle $\mathfrak{F}[h] \cap \partial S \neq \emptyset$ existiert natürlich keine offene Teilmenge S_0 von S mit $\mathfrak{F}[h] \subset S_0$, d.h. die Behauptung b) ist für $\mathfrak{F}[h] \cap \partial S \neq \emptyset$ eine leere Aussage. Die Voraussetzung (2.11) verallgemeinert eine ähnliche Bedingung bei P. P. Zabrejko - M. A. Krasnosel'skii [25].

Beweis von Lemma 2:

1) Es sei $\mathfrak{F}[h] \cap \partial S \neq \emptyset$. Das bedeutet insbesondere, daß ein Fixpunkt $x \in \bar{S}$ existiert, d.h. Behauptung a) ist erfüllt. Die Behauptung b) braucht in diesem Falle nicht weiter untersucht zu werden, da sie hier nach obiger Bemerkung eine leere Aussage ist.

2) Es sei $\mathfrak{F}[h] \cap \partial S = \emptyset$ und $\partial S \neq \emptyset$.

a) Da $S \cap \text{co}[\{x_0\} \cup h(S)]$ beschränkt ist, gibt es ein $\rho_0 > 0$ mit

$$(2.12) \quad S \cap \text{co}[\{x_0\} \cup h(S)] \subset K(0, \rho_0).$$

Auch die Menge $\bar{S} \cap \overline{\text{co}[\{x_0\} \cup h(S)]}$ ist beschränkt. Denn wenn sie nicht beschränkt ist, gibt es ein $z \in \bar{S} \cap \overline{\text{co}[\{x_0\} \cup h(S)]}$ mit $\|z\| \geq 4\rho_0 + \frac{d}{4} + \|x_0\|$, wobei

$$(2.13) \quad d := \text{dist}(x_0, \partial S)$$

ist. (Trivialerweise ist $d > 0$.) Wegen $z \in \bar{S} \cap \overline{\text{co}[\{x_0\} \cup h(S)]}$ existieren dann Punkte $y_0 \in \text{co}[\{x_0\} \cup h(S)] \cap K(z, \frac{d}{4})$ und $y_1 \in S \cap K(z, \frac{d}{4})$. Es sei $x_1 := x_0 + y_0 - y_1$. Dann ist

$$\|x_1 - x_0\| = \|y_0 - y_1\| \leq \|y_0 - z\| + \|z - y_1\| \leq \frac{d}{4} + \frac{d}{4} = \frac{d}{2},$$

und folglich ist wegen (2.13) $x_1 \in S$. Da S konvex ist, ist $\overline{x_1, y_1} \subset S$ ⁴⁾. Gleichzeitig gilt $\overline{x_0, y_0} \subset \text{co}[\{x_0\} \cup h(S)]$.

Es ist

$$\frac{1}{2}(x_0 + y_0) (= \frac{1}{2}(x_1 + y_1)) \in \overline{x_1, y_1} \cap \overline{x_0, y_0} \subset S \cap \text{co}[\{x_0\} \cup h(S)].$$

⁴⁾ Mit $\overline{x, y}$ wird die Verbindungsstrecke der Punkte x und y bezeichnet, d.h. $\overline{x, y} := \{z \in E \mid z = tx + (1-t)y; t \in [0, 1]\}$.

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \|\frac{1}{2}(x_0 + y_0)\| &\geq \frac{1}{2}\|y_0\| - \frac{1}{2}\|x_0\| \geq \frac{1}{2}\|z\| - \frac{1}{2}\|y_0 - z\| - \frac{1}{2}\|x_0\| \geq \\ &\geq 2\rho_0 + \frac{d}{8} + \frac{1}{2}\|x_0\| - \frac{d}{8} - \frac{1}{2}\|x_0\| = 2\rho_0 \end{aligned}$$

im Widerspruch zu (2.12). Damit ist bewiesen, daß die Menge $\bar{S} \cap \overline{\text{co}[\{x_0\} \cup h(S)]}$ beschränkt ist. Da h vollstetig ist, folgt:

$$(2.14) \quad \overline{h(\bar{S} \cap \overline{\text{co}[\{x_0\} \cup h(S)])} \text{ ist kompakt.}$$

3) Die Fortsetzung h_1 von $h: \bar{S} \rightarrow E$ auf ganz E sei für $x \in E \setminus \bar{S}$ definiert durch $h_1(x) := h(x_1)$, wobei x_1 der eindeutig erklärte Schnittpunkt von $\overline{x, x_0}$ und ∂S sei. Aus dieser Definition folgt sofort, daß $h_1(\overline{\text{co}[\{x_0\} \cup h(S)]}) = \overline{h(\bar{S} \cap \overline{\text{co}[\{x_0\} \cup h(S)])}$ ist. Wegen (2.14) ist also insbesondere

$$(2.15) \quad \overline{h_1(\overline{\text{co}[\{x_0\} \cup h(S)])} \text{ kompakt.}$$

Außerdem gilt:

$$(2.16) \quad h_1 \text{ ist stetig.}$$

Die Stetigkeit von h_1 auf S folgt direkt aus der Stetigkeit von h . Es bleibt zu zeigen, daß h_1 für alle $x \in E \setminus S$ stetig ist:

Es sei x_1 der Schnittpunkt von $\overline{x, x_0}$ und ∂S . Wenn es gelingt zu zeigen, daß es zu jedem $\delta > 0$ ein $\delta' > 0$ gibt mit

$$(2.17) \quad h_1(K(x, \delta')) \subset h(K(x_1, \delta) \cap \bar{S}),$$

dann folgt aus der Stetigkeit von h im Punkte x_1 sofort die Stetigkeit von h_1 im Punkte x .

Es sei $R := \|x - x_0\|$, $r := \|x_1 - x_0\|$ und $d := \text{dist}(x_0, \partial S)$. Im folgenden wird nachgewiesen, daß mit

Es ist

$$(2.20) \quad \|y_1 - y_2\| d \leq \|x_0 - y_1\| \delta'.$$

Beim Beweis dieser Ungleichung kann man sich auf den Fall $y_1 \neq y_2$ beschränken:

x_2 sei der Schnittpunkt von $\langle x_1, y_1 \rangle$ ⁵⁾ mit der durch x_0 gehenden Parallelen zu $\langle x_1, y_2 \rangle$ (siehe Figur 1). Wegen $x_0 \in \langle y_1, y_2 \rangle \setminus \overline{y_1, y_2}$ ist $x_2 \in \langle x_1, y_1 \rangle \setminus \overline{x_1, y_1}$. Daraus sowie aus $x_1 \in \partial S$, $y_1 \in \partial S$ und der Tatsache, daß S offen und konvex ist, folgt $x_2 \notin S$, d.h. es ist $\|x_0 - x_2\| \geq d$. Setzt man diese Ungleichung und (2.19) in die Identität $\|y_1 - y_2\| \|x_0 - x_2\| = \|x_0 - y_1\| \|y_2 - x_1\|$ (ähnliche Dreiecke!) ein, so erhält man (2.20).

Wegen

$$\|y_1 - y_2\| \geq \|x_1 - y_1\| - \|y_2 - x_1\| \geq \|x_1 - y_1\| - \delta'$$

und

$$\|x_0 - y_1\| \leq \|x_1 - y_1\| + \|x_0 - x_1\| = \|x_1 - y_1\| + r$$

folgt aus (2.20) die Ungleichung

$$(\|x_1 - y_1\| - \delta') d \leq (\|x_1 - y_1\| + r) \delta'.$$

Eine triviale Umformung ergibt $\|x_1 - y_1\| \leq \frac{(r+d)\delta'}{d-\delta'}$. Setzt man hier die Abschätzung $\delta' \leq \frac{d}{r+d+\delta} \delta$ (vgl. (2.18)) ein, so erhält man über

$$\|x_1 - y_1\| \leq (r+d) \cdot \delta' \cdot \frac{1}{d-\delta'} \leq (r+d) \frac{d\delta}{r+d+\delta} \frac{r+d+\delta}{(r+d+\delta)d-\delta d} = \delta$$

die gewünschte Beziehung $y_1 \in K(x_1, \delta)$.

⁵⁾ Mit $\langle x, y \rangle$ wird die Gerade durch die Punkte x und y bezeichnet, d.h. $\langle x, y \rangle := \{z \in E \mid z = tx + (1-t)y; t \in \mathbb{R}\}$.

γ) Eine einfache Folgerung von (2.11) ist:

(2.21) h_1 besitzt auf $\overline{\text{co}[\{x_0\} \cup h(S)]} \setminus \bar{S}$ keine Fixpunkte.

Denn wäre x ein Fixpunkt von h_1 mit $x \in \overline{\text{co}[\{x_0\} \cup h(S)]} \setminus \bar{S}$ und x_1 der Schnittpunkt von $\overline{x, x_0}$ und ∂S , so wäre einerseits

$$(2.22) \quad x = h_1(x) = h(x_1)$$

und andererseits

$$(2.23) \quad x - x_0 = \lambda(x_1 - x_0) \text{ mit einem } \lambda > 1.$$

Daraus erhielte man durch Einsetzen von (2.22) in (2.23) die Beziehung $h(x_1) - x_0 = \lambda(x_1 - x_0)$ mit $\lambda > 1$, die im Widerspruch zu (2.11) steht.

δ) Es sei S_0 eine nichtleere, beschränkte, offene Teilmenge von S mit $\mathcal{F}[h] \subset S_0$. Aus der Vollstetigkeit von h folgt, daß auch $h(S_0)$ beschränkt ist. Da wegen (2.15) zudem $h_1(\overline{\text{co}[\{x_0\} \cup h(S)]})$ beschränkt ist, gibt es ein $\epsilon > 0$ mit

$$(2.24) \quad h_1(\overline{\text{co}[\{x_0\} \cup h(S)]}) \cup S_0 \cup h(\bar{S}_0) \subset K(0, \epsilon).$$

Aus (2.15) und der Tatsache, daß S_0 beschränkt und $h_1(\bar{S}) := h$ vollstetig ist, erhält man:

$$(2.25) \quad h_1(\bar{S}_0 \cup \overline{\text{co}[\{x_0\} \cup h(S)]}) \text{ ist kompakt.}$$

Außerdem ist

$$(2.26) \quad h_1(\bar{S}_0 \cup \overline{\text{co}[\{x_0\} \cup h(S)]}) \subset \overline{\text{co}[\{x_0\} \cup h(S)]} \cap K(0, \epsilon).$$

Dies folgt aus

$$\begin{aligned} h_1(\bar{S}_0 \cup \overline{\text{co}[\{x_0\} \cup h(S)]}) &= h_1(\bar{S}_0) \cup h_1(\overline{\text{co}[\{x_0\} \cup h(S)]}) = \\ &= h(\bar{S}_0) \cup h_1(\overline{\text{co}[\{x_0\} \cup h(S)]}), \end{aligned}$$

denn einerseits gilt wegen (2.24)

$$h(\overline{S_0}) \cup h_1(\overline{\text{co}[\{x_0\} \cup h(S)]}) \subset K(0, \rho)$$

und andererseits ist

$$\begin{aligned} h(\overline{S_0}) \cup h_1(\overline{\text{co}[\{x_0\} \cup h(S)]}) &= h(\overline{S_0}) \cup h(\overline{\text{co}[\{x_0\} \cup h(S)]} \cap \overline{S}) \subset \\ &\subset h(\overline{S}) \subset \overline{\text{co}[\{x_0\} \cup h(S)]}. \end{aligned}$$

Nach J. Dugundji [5] existiert eine stetige Fortsetzung h_2 von $h_1(\overline{S_0} \cup \overline{\text{co}[\{x_0\} \cup h(S)]})$ auf E mit

$$(2.27) \quad h_2(E) \subset \overline{\text{co}[h_1(\overline{S_0} \cup \overline{\text{co}[\{x_0\} \cup h(S)]})]}.$$

Aus (2.25) und (2.27) folgt, daß $h_2(E)$ kompakt und somit h_2 vollstetig ist. Zudem gilt wegen (2.26) und (2.27)

$$(2.28) \quad h_2(E) \subset \overline{\text{co}[\{x_0\} \cup h(S)]} \cap K(0, \rho),$$

woraus insbesondere folgt, daß h_2 auf $E \setminus \overline{\text{co}[\{x_0\} \cup h(S)]}$ keine Fixpunkte besitzt. Wegen (2.21) liegen dann alle Fixpunkte von h_2 in $\overline{S} \cap \overline{\text{co}[\{x_0\} \cup h(S)]}$, sind also Fixpunkte von h . Mit $\mathcal{F}[h] \subset S_0$ erhält man schließlich

$$(2.29) \quad \mathcal{F}[h_2] = \mathcal{F}[h] \subset S_0.$$

Weil S_0 eine offene Teilmenge von $K(0, \rho)$ ist (siehe insbesondere (2.24)), folgt aus (2.29) $\mathcal{F}[h_2] \subset \overset{\circ}{K}(0, \rho)$. Da somit $\mathcal{F}[h_2] \cap \partial K(0, \rho) = \emptyset$ ist und da h_2 vollstetig ist, existiert der Abbildungsgrad $d[\text{id} - h_2, K(0, \rho), 0]$, der den Wert 1 hat, weil wegen $h_2(K(0, \rho)) \subset K(0, \rho)$ (vgl. (2.28)) die Abbildungen id und $\text{id} - h_2$ auf $K(0, \rho)$ homotop sind. Mit Hilfe von $\mathcal{F}[h_2] \subset S_0 \subset K(0, \rho)$ (vgl. (2.24) und (2.29)) erhält man dann

$$d[\text{id} - h_2, S_0, 0] = d[\text{id} - h_2, K(0, \rho), 0] = 1$$

und daraus wegen $h_2(\overline{S_0}) = h(\overline{S_0})$ die gesuchte Beziehung

$$d[\text{id} - h, S_0, 0] = 1.$$

Insbesondere ist also $\mathcal{T}[h] \neq \emptyset$. Denn wäre $\mathcal{T}[h] = \emptyset$, so gäbe es trivialerweise eine nichtleere, offene, beschränkte Menge S_0 mit $\emptyset = \mathcal{T}[h] \subset S_0 \subset S$, für die dann $d[\text{id} - h, S_0, 0] = 1$ und folglich $\mathcal{T}[h(S_0)] \neq \emptyset$ wäre im Widerspruch zur obigen Annahme. Damit ist Behauptung a) bewiesen. Da dann die zu Anfang von Beweisteil 2δ) gemachte Voraussetzung $S_0 \neq \emptyset$ wegen $\emptyset \neq \mathcal{T}[h] \subset S_0$ keine Einschränkung bedeutet, ist auch die Behauptung b) bewiesen.

3) Es bleibt noch der Fall $\partial S = \emptyset$, d.h. $S = E$, zu untersuchen. S_0 sei eine nichtleere, offene, beschränkte Teilmenge von S mit $\mathcal{T}[h] \subset S_0$. Wegen (2.11) ist $h(S)$ beschränkt. Es gibt also ein $\rho > 0$ mit

$$(2.30) \quad h(S) \cup S_0 \subset K(0, \rho).$$

Weil S_0 offen ist und $\mathcal{T}[h]$ enthält, gilt nach (2.30)

$$(2.31) \quad \mathcal{T}[h] \subset S_0 \subset \overset{\circ}{K}(0, \rho),$$

d.h. es ist insbesondere $\mathcal{T}[h] \cap \partial K(0, \rho) = \emptyset$. Da zudem h vollstetig ist, existiert der Abbildungsgrad $d[\text{id} - h, K(0, \rho), 0]$, der wegen $h(K(0, \rho)) \subset K(0, \rho)$ (vgl. (2.30)) den Wert 1 hat.

Aus (2.31) folgt schließlich

$$d[\text{id} - h, S_0, 0] = d[\text{id} - h, K(0, \rho), 0] = 1.$$

Daraus erhält man mit wörtlich der gleichen Begründung wie im obigen letzten Abschnitt von Beweisteil 2δ) die Behauptungen a) und b) für den Fall $\partial S = \emptyset$. (Die Behauptung a) entspricht übrigens in diesem Fall der in der Einleitung als Satz A4 zitierten Form des Schauderschen Fixpunktsatzes!)

q.e.d.

3. Besondere Abänderungen von stetig differenzierbaren Operatoren

Wie schon in der Einleitung erwähnt wurde, wird der Beweis von Lemma 1 dadurch geführt, daß unter der Annahme $\mathfrak{F}[g(M)] = \emptyset$ durch Abänderungen von g und durch Einbettung in einen Euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbarer Operator $g_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ konstruiert wird, der auf einer gewissen nichtleeren, beschränkten Menge $T = \bar{T} \subset \mathbb{R}^n$ fixpunktfrei ist und die folgenden Eigenschaften besitzt:

$$(0.8) \quad \mathfrak{F}[g_1^P(T)] = g_1(\mathfrak{F}[g_1^P(T)]) \subset \bar{T}$$

$$(0.9) \quad \left[\begin{array}{l} \mathfrak{F}[g_1^P(T)] \text{ besteht aus isolierten Punkten, in} \\ \text{denen die Funktionaldeterminante von } \text{id} - g_1^P \\ \text{von Null verschieden ist.} \end{array} \right.$$

$$(0.10) \quad d[\text{id} - g_1^P, T, 0] \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

Die Eigenschaften (0.8), (0.9), (0.10) und $\mathfrak{F}[g_1(T)] = \emptyset$ führen dann relativ einfach zu einem Widerspruch, so daß die Annahme $\mathfrak{F}[g(M)] = \emptyset$ falsch sein muß.

Bei der Konstruktion von g_1 bereitet am meisten Schwierigkeiten die Frage der Erfüllbarkeit von (0.9), die allein dieses Kapitel beanspruchen wird. Das hierbei resultierende Lemma 4 macht eine ähnliche Aussage wie das bei E. Heinz [9] aufgeführte Lemma 6 (siehe auch Ch. Loewner [15], Seite 318 - 319 und G. de Rham [18], Seite 96), ist allerdings wesentlich schwieriger zu beweisen.

Als Vorbereitung zu Lemma 4 folgen einige Hilfssätze, von denen die beiden ersten (Hilfssatz 1 und Lemma 3) noch an anderer Stelle entscheidend in den Beweis von Lemma 1

eingehen. Der Hilfssatz 1 ist in ähnlicher Form mehrfach in der Literatur aufgeführt, z.B. bei R. Bellman [2], Seite 95.

HILFSSATZ 1. Es sei $n \in \mathbb{N}$. $\mathbb{I}, G$ und B seien quadratische n -reihige Matrizen ($\mathbb{I} = \text{Einheitsmatrix}$). Dann gilt:

$$(3.1) \quad \det(\mathbb{I} - GB) = \det(\mathbb{I} - BG).$$

Beweis: I. Es sei G oder B nichtsingulär. Ohne Einschränkung kann man annehmen, daß G nichtsingulär ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{I} - GB) &= \det(G^{-1}) \det(\mathbb{I} - GB) \det(G) = \det(G^{-1}(\mathbb{I} - GB)G) = \\ &= \det(G^{-1}G - G^{-1}GB) = \det(\mathbb{I} - BG). \end{aligned}$$

II. Es seien G und B singulär. Man definiere

$$\begin{aligned} G_\epsilon &:= G + \epsilon \mathbb{I} \text{ mit } \epsilon \in \mathbb{R}. \det(G_\epsilon) \text{ ist ein Polynom in } \epsilon. \text{ Also} \\ &\text{gibt es eine Nullfolge } \{\epsilon_\nu\}_1^\infty \subset \mathbb{R} \text{ mit } \det(G_{\epsilon_\nu}) \neq 0 \text{ für alle} \\ &\nu \in \mathbb{N}. \text{ Wegen } \lim_{\nu \rightarrow \infty} (\det(\mathbb{I} - G_{\epsilon_\nu} B)) = \det(\mathbb{I} - GB) \text{ und} \\ &\lim_{\nu \rightarrow \infty} (\det(\mathbb{I} - BG_{\epsilon_\nu})) = \det(\mathbb{I} - BG) \text{ gilt deshalb nach Teil I:} \\ \det(\mathbb{I} - GB) &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} (\det(\mathbb{I} - G_{\epsilon_\nu} B)) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} (\det(\mathbb{I} - BG_{\epsilon_\nu})) = \\ &= \det(\mathbb{I} - BG). \end{aligned}$$

q.e.d.

Es sei G eine Teilmenge eines Banachraumes E und $h: G \rightarrow E$ eine vollstetige Abbildung. Für jedes $x \in G$, zu dem es eine Umgebung U von x gibt, so daß $U \subset G$ und $x - h(x) \neq y - h(y)$ für alle $y \in U \setminus \{x\}$ ist, existiert der "Abbildungsindex der Abbildung $\text{id} - h$ im Punkte x ", der in Anlehnung an E. Heinz [9], Definition 3 mit $i[\text{id} - h, x]$ bezeichnet werden soll.

Bei Abbildungen $h: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($G \subset \mathbb{R}^n$) mit $h \in C^1(G)$ werden die folgenden Abkürzungen verwendet: Für $x \in G$ wird mit $\mathcal{M}_h[x]$ die Jakobi-Matrix, mit $J_h[x]$ die Funktionaldeterminante von h im Punkte x bezeichnet.

Mit Hilfe von Hilfssatz 1 folgt nun:

LEMMA 3. Die Abbildung $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei aus $C^1(\mathbb{R}^n)$.

Es sei $m \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathcal{F}[h^m]$. Dann ist

$$(3.2) \quad J_{\text{id}-h^m}[x] = J_{\text{id}-h^m}[h(x)] = \dots = J_{\text{id}-h^m}[h^{m-1}(x)].$$

Im Falle $J_{\text{id}-h^m}[x] \neq 0$ gilt außerdem

$$(3.3) \quad \begin{cases} i[\text{id}-h^m, x] = i[\text{id}-h^m, h(x)] = \dots \\ \dots = i[\text{id}-h^m, h^{m-1}(x)] = \pm 1. \end{cases}$$

Beweis: Nach der Additions- und der Kettenregel gilt für alle $y \in \mathbb{R}^n$ die Darstellung

$$(3.4) \quad \mathcal{M}_{\text{id}-h^m}[y] = \mathcal{I} - \mathcal{M}_h[h^{m-1}(y)] \cdot \mathcal{M}_h[h^{m-2}(y)] \cdot \dots \cdot \mathcal{M}_h[y].$$

Aus (3.1) und der Identität $x = h^m(x)$ folgt dann:

$$\begin{aligned} J_{\text{id}-h^m}[x] &= \\ &= \det(\mathcal{M}_{\text{id}-h^m}[x]) = \\ &= \det(\mathcal{I} - (\mathcal{M}_h[h^{m-1}(x)] \cdot \dots \cdot \mathcal{M}_h[h(x)]) \cdot \mathcal{M}_h[x]) = \\ &= \det(\mathcal{I} - \mathcal{M}_h[x] \cdot (\mathcal{M}_h[h^{m-1}(x)] \cdot \dots \cdot \mathcal{M}_h[h(x)])) = \\ &= \det(\mathcal{I} - \mathcal{M}_h[h^m(x)] \cdot \mathcal{M}_h[h^{m-1}(x)] \cdot \dots \cdot \mathcal{M}_h[h(x)]) = \\ &= \det(\mathcal{M}_{\text{id}-h^m}[h(x)]) = \\ &= J_{\text{id}-h^m}[h(x)] \end{aligned}$$

Für $J_{\text{id}-h^m}[x] \neq 0$ (und somit auch $J_{\text{id}-h^m}[h(x)] \neq 0$) sind bekanntlich die Punkte x und $h(x)$ isolierte Fixpunkte von h^m , d.h. es existieren die Abbildungsindizes $i[\text{id}-h^m, x]$

und $i[id - h^m, h(x)]$ und es gilt (siehe etwa P. Alexandroff - H. Hopf [1], Seite 477 oder E. Heinz [9], Lemma 5):

$$i[id - h^m, x] = \frac{J_{id-h^m}[x]}{|J_{id-h^m}[x]|} = \frac{J_{id-h^m}[h(x)]}{|J_{id-h^m}[h(x)]|} = i[id - h^m, h(x)] = \pm 1.$$

Analog zu $J_{id-h^m}[x] = J_{id-h^m}[h(x)]$ beweist man auch $J_{id-h^m}[h(x)] = J_{id-h^m}[h^2(x)]$ usw. (denn auch die Punkte $h^j(x)$ ($j = 1, \dots, m-1$) sind Fixpunkte von h^m), woraus die Behauptung endgültig folgt. q.e.d.

Bei Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$ werden im folgenden Komponenten-darstellungen $x = (x_1, \dots, x_n)$ stets bezüglich eines festen orthonormierten Koordinatensystems $e^{(1)}, \dots, e^{(n)}$ gewählt sein. Dann ist $|x| := (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$. Eine einfache Differenziation nach der k -ten Komponente wird mit D_k bezeichnet.

HILFSSATZ 2. Die Abbildung $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei aus $C^1(\mathbb{R}^n)$, und die Menge $G \subset \mathbb{R}^n$ sei beschränkt. Dann ist h auf G lipschitzstetig mit der Lipschitzkonstanten

$$\left(\sum_{i,k=1}^n \max_{z \in \text{co}[G]} \left[\left(\frac{\partial}{\partial z_k} (h(z))_i \right)^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Beweis: Es seien $x, y \in G$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es auf der Verbindungsstrecke $\overline{x, y}$ Punkte $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}$ (die somit in $\text{co}[G]$ liegen), so daß gilt:

$$\begin{aligned} |h(x) - h(y)|^2 &= \\ &= \sum_{i=1}^n [(h(x))_i - (h(y))_i]^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\sum_{k=1}^n (D_k(h(\xi^{(i)}))_i) (x_k - y_k) \right]^2 \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left[\sum_{k=1}^n (D_k(h(\xi^{(i)}))_i)^2 \sum_{l=1}^n (x_l - y_l)^2 \right] = \end{aligned}$$

$$= |x - y|^2 \sum_{i,k=1}^n (D_k(h(\xi^{(i)}))_i)^2 \leq \\ \leq |x - y|^2 \sum_{i,k=1}^n \max_{z \in \omega(\xi)} \left[\left(\frac{\partial}{\partial z_k} (h(z))_i \right)^2 \right]$$

q.e.d.

HILFSSATZ 3. Es seien C und τ reelle positive Konstanten
und p eine Primzahl. Die Zahl

$$(3.5) \quad \beta := [p(1 + C^{p^2})]^{-1} \cdot \tau$$

ist wegen C, $\tau > 0$ auch positiv, und es gilt:

Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$, und die Abbildung $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ erfülle
die Bedingungen

$$(3.6) \quad |h(x) - h(y)| \leq C|x - y| \text{ für alle } x, y \in \bigcup_{j=0}^{p-1} h^j(G)$$

und

$$(3.7) \quad |y - h(y)| \geq \tau \text{ für alle } y \in G.$$

Dann ist

$$(3.8) \quad \left[\begin{array}{l} |x - h^j(x)| \geq \beta \text{ für alle } j \in \{1, \dots, p-1\} \\ \text{und } x \in \mathcal{F}[h^p(G)]. \end{array} \right.$$

Beweis: Es sei $j \in \{1, \dots, p-1\}$. Da j und p relativ prim sind, existiert ein $\lambda_j \in \{1, \dots, p-1\}$ mit $\lambda_j \cdot j \equiv 1 \pmod{p}$.

Für $x \in \mathcal{F}[h^p(G)]$ folgt:

$$\tau \leq |x - h(x)| = |x - h^{\lambda_j \cdot j}(x)| \leq \\ \leq |x - h^j(x)| + |h^j(x) - h^{2j}(x)| + \dots + |h^{(\lambda_j - 1)j}(x) - h^{\lambda_j \cdot j}(x)|.$$

Wegen $x \in \mathcal{F}[h^p(G)]$ liegen die Punkte $h^\mu(x)$ ($\mu \in \mathbb{N} \cup \{0\}$)

alle in $\bigcup_{j=0}^{p-1} h^j(G)$. Man kann also (3.6) anwenden und erhält

$$\text{für } v = 0, \dots, \lambda_j - 1: |h^{vj}(x) - h^{(v+1)j}(x)| \leq C^{vj} |x - h^j(x)|.$$

Man kann somit weiter abschätzen:

$$\begin{aligned} \tau &\leq (1 + C^j + \dots + C^{(\lambda_j - 1)j}) |x - h^j(x)| \leq \\ &\leq (1 + C^j + \dots + C^{(p-1)j}) |x - h^j(x)| \leq \\ &\leq p \max[1, C^{(p-1)j}] |x - h^j(x)| \leq p \max[1, C^{p^2}] |x - h^j(x)| \leq \\ &\leq p(1 + C^{p^2}) |x - h^j(x)| \end{aligned}$$

Es ist also $\tau \leq p(1 + C^{p^2}) |x - h^j(x)|$, woraus wegen (3.5) und $p(1 + C^{p^2}) > 0$ sofort $|x - h^j(x)| \geq \beta$ folgt. q.e.d.

Nach diesen Vorbereitungen kann nun das folgende Lemma 4 bewiesen werden:

LEMMA 4. Die Abbildung $h_0: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei aus $C^1(\mathbb{R}^n)$, p sei eine Primzahl und G eine beschränkte, offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, so daß $x \notin h_0(x)$ für alle $x \in \bar{G}$ und $x \notin h_0^p(x)$ für alle $x \in \partial G$ ist. Dann gibt es zu jedem $\delta > 0$ eine Abbildung $\tilde{h}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit den Eigenschaften:

$$(3.9) \quad \tilde{h} \in C^1(\mathbb{R}^n)$$

$$(3.10) \quad |h_0(x) - \tilde{h}(x)| \leq \delta \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n$$

$$(3.11) \quad J_{\text{id}-\tilde{h}^p}[x] \neq 0 \text{ für alle } x \in \mathcal{F}[\tilde{h}^p(\bar{G})].$$

Da der Beweis von Lemma 4 sehr umfangreich ist, soll zuvor kurz die Beweisidee erläutert werden:

Es sei $W := \{x \in \mathbb{R}^n \mid J_{\text{id}-h_0^p}[x] = 0\}$. Nach dem Sardischen Lemma (siehe A. Sard [21]) hat die Menge $(\text{id}-h_0^p)(W)$ das Lebesguesche Maß Null. Es gibt also zu jedem $\delta' > 0$ ein $z \in \mathbb{R}^n$ mit $z \notin (\text{id}-h_0^p)(W)$ und $|z| \leq \delta'$. Die Abbildung $w: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, definiert durch $w(x) := h_0^p(x) + z$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, hat dann die Eigenschaft, daß $J_{\text{id}-w}[x] \neq 0$ ist für alle $x \in \mathcal{F}[w]$ (vgl. hierzu auch E. Heinz [9], Lemma 6

bzw. Ch. Loewner [15], Seite 318-319 und G. de Rham [18], Seite 96). Die gewünschte Funktion $\tilde{h}$ wird dann folgendermaßen konstruiert (Im Beweis von Lemma 4 ist die Methode geringfügig gegenüber dieser Darstellung modifiziert!):

Es seien S_1' und S_1'' konzentrische offene Kugeln mit $\overline{S_1'} \subset S_1'' \subset G$. Durch Abänderung von h_0 erhält man die folgendermaßen definierte Funktion h_1 :

$$(3.12) \quad h_1(\mathbb{R}^n \setminus S_1'') := h_0(\mathbb{R}^n \setminus S_1'')$$

$$(3.13) \quad \begin{cases} h_1(x) := h_0(x) + z \text{ für alle } x \in S_1' \text{ (mit dem} \\ \text{gleichen } z \text{ wie oben!)} \end{cases}$$

$$(3.14) \quad \begin{cases} \text{Auf dem Randstreifen } S_1'' \setminus \overline{S_1'} \text{ wird } h_1 \text{ so} \\ \text{ergänzt, daß } h_1 \in C^1(\mathbb{R}^n) \text{ ist.} \end{cases}$$

Wenn $|z|$ sowie S_1' und S_1'' genügend klein sind, liegen für jedes $x \in \mathcal{T}[h_1^p(S_1')]$ die Bildpunkte $h_1(x), \dots, h_1^{p-1}(x)$ alle außerhalb von S_1'' . Eine einfache Überlegung (Folgerung aus $h_1^p(x) = x$, (3.12) und (3.13)) ergibt, daß h_1^p dann in einer (möglicherweise kleinen) Umgebung von $h_1(x)$ identisch mit der oben definierten Abbildung w ist. Insbesondere ist also $J_{\text{id}-h_1^p}[h_1(x)] \neq 0$, woraus nach Lemma 3 $J_{\text{id}-h_1^p}[x] \neq 0$ folgt. Man hat also erreicht, daß Fixpunkte y von h_1^p mit $J_{\text{id}-h_1^p}[y] = 0$ nur außerhalb von S_1' liegen können. Nach der gleichen Methode kann nun eine Abänderung h_2 von h_1 gebildet werden, die auf einer weiteren Kugel S_2' frei von Punkten $y \in \mathcal{T}[h_2^p]$ mit $J_{\text{id}-h_2^p}[y] = 0$ ist, wobei es etwas schwierig ist zu vermeiden, daß solche y wieder in S_1' auftreten. Es zeigt sich, daß man mit endlich vielen Abänderungsschritten dieser Art eine Abbildung $\tilde{h}$ mit den gewünschten Eigenschaften

(3.9), (3.10) und (3.11) konstruieren kann, wobei die Anzahl der Schritte schon am Anfang des Beweises (Abschnitt III mit Vorbereitung in Abschnitt I und II) festgelegt werden kann.

Beweis von Lemma 4:

Da für $\mathfrak{T}[h_0^P\langle G \rangle] = \emptyset$ das Lemma 4 trivial ist (man definiere $\tilde{h} := h_0$), genügt es, im folgenden nur den Fall

$$(3.15) \quad \mathfrak{T}[h_0^P\langle G \rangle] \neq \emptyset$$

zu betrachten. Es ist dann insbesondere $G \neq \emptyset$ und, da G beschränkt und somit $G \neq \mathbb{R}^n$ ist, auch $\partial G \neq \emptyset$.

I. Wegen $x \neq h_0^P(x)$ für alle $x \in \partial G$, $h_0^P \in C^0(\bar{G})$, $\partial G \neq \emptyset$ und der Kompaktheit von ∂G ist

$$\kappa := \min_{x \in \partial G} |x - h_0^P(x)| > 0,$$

und es gibt eine abgeschlossene Menge $G_0 \subset G$, so daß

$$(3.16) \quad |x - h_0^P(x)| \geq \frac{\kappa}{2} \text{ für alle } x \in G \setminus G_0$$

ist. Nach (3.15) und (3.16) ist $G_0 \neq \emptyset$.

II. Es sei (vgl. auch Anhang I)

$$(3.17) \quad G_1 := G \cup \left[\bigcup_{i=0}^{p-2} h_0^i([h_0(G)]^\delta) \right],$$

$$(3.18) \quad C := 2 \left(\sum_{i,k=1}^n \max_{z \in \text{col}(G)} \left[\left(\frac{\partial}{\partial z_k} (h_0(z)) \right)_i \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$(3.19) \quad \tau := \frac{1}{2} \min_{x \in G} |x - h_0(x)|$$

und

$$(3.20) \quad \beta := [p(1 + C^{p^2})]^{-1} \cdot \tau.$$

Nach Hilfssatz 2 und 3 gelten die Ungleichungen

$$|h_0(x) - h_0(y)| \leq C|x - y| \text{ für alle } x, y \in G_1 \text{ und}$$

$|x - h_0^j(x)| \geq \beta$ für alle $j \in \{1, \dots, p-1\}$ und $x \in \mathcal{F}[h_0^p(G)]$, die allerdings von geringem Interesse sind. Es kommt vielmehr darauf an, die schrittweisen Abänderungen von h_0 so günstig zu wählen, daß man für die dabei entstehenden Abbildungen $h_1, h_2, \dots$ entsprechende Abschätzungen erhält.

III. Da G offen und $G_0 \subset G$ ist, gibt es zu jedem $x \in G_0$ eine ganz in G liegende abgeschlossene Kugel S_x mit Mittelpunkt x und Radius ρ_x mit

$$(3.21) \quad 0 < \rho_x \leq \frac{\beta}{4}.$$

Es ist dann

$$(3.22) \quad G_0 \subset \bigcup_{x \in G_0} \overset{\circ}{S}_x \subset \bigcup_{x \in G_0} S_x \subset G.$$

Weil G_0 abgeschlossen und beschränkt ist, genügen nach dem Satz von Heine und Borel endlich viele Kugeln $S_i := S_{x^{(i)}}$ ($i = 1, \dots, r$ mit einem $r \in \mathbb{N}$), so daß

$$(3.23) \quad G_0 \subset \bigcup_{i=1}^r \overset{\circ}{S}_i$$

ist. $\bigcup_{i=1}^r S_i$ ist eine kompakte Teilmenge der offenen Menge G (vgl. (3.22)), und folglich ist

$$(3.24) \quad \alpha := \text{dist}\left(\bigcup_{i=1}^r S_i, \partial G\right) > 0.$$

IV. $\lambda(\cdot)$ sei eine auf $[0, \infty)$ erklärte reellwertige Funktion mit folgenden Eigenschaften:

$$(3.25) \quad \lambda(\cdot) \in C^1([0, \infty))$$

$$(3.26) \quad 0 \leq \lambda(x) \leq 1 \text{ für alle } x \in [0, \infty)$$

$$(3.27) \quad |\lambda'(x)| \leq 4 \text{ für alle } x \in [0, \infty)$$

$$(3.28) \quad \lambda(x) = \begin{cases} 1 & \text{für alle } x \in [0, \frac{1}{3}] \\ 0 & \text{für alle } x \in [\frac{2}{3}, \infty) \end{cases}$$

V. Für $i = 1, \dots, r$ und $0 < \sigma < \infty$ seien Funktionen $\mu_i^{(\sigma)}(\cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$(3.29) \quad \mu_i^{(\sigma)}(x) := \lambda \left(\frac{\text{dist}(x, S_i)}{\sigma} \right) = \lambda \left(\frac{\max[0, |x - x^{(i)}| - \rho_{x^{(i)}}]}{\sigma} \right).$$

Die Funktionen $\mu_i^{(\sigma)}(\cdot)$ haben die folgenden wichtigen Eigenschaften:

a) Es gilt

$$(3.30) \quad \mu_i^{(\sigma)}(\cdot) \in C^1(\mathbb{R}^n) \text{ für } i = 1, \dots, r \text{ und } 0 < \sigma < \infty,$$

denn einerseits folgt aus (3.28) und (3.29)

$$\mu_i^{(\sigma)}(\cdot) \langle (S_i)^c \rangle \equiv 1, \text{ andererseits ist } \mu_i^{(\sigma)}(\cdot) \langle \mathbb{R}^n \setminus S_i \rangle \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus S_i) \text{ wegen (3.25) und } \max[0, |\cdot - x^{(i)}| - \rho_{x^{(i)}}] \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus S_i).$$

b) Für $x \neq x^{(i)}$ ist bekanntlich

$$\text{grad} |x - x^{(i)}| = \frac{x - x^{(i)}}{|x - x^{(i)}|}$$

Folglich ist

$$\text{grad}(\mu_i^{(\sigma)}(x)) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} \lambda' \left(\frac{1}{\sigma} \text{dist}(x, S_i) \right) \cdot \frac{x - x^{(i)}}{|x - x^{(i)}|} & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \setminus S_i \\ 0 & \text{für } x \in S_i \end{cases}$$

und nach (3.27)

$$|\text{grad}(\mu_i^{(\sigma)}(x))| \leq \begin{cases} \frac{1}{\sigma} |\lambda' \left(\frac{1}{\sigma} \text{dist}(x, S_i) \right)| \leq \frac{4}{\sigma} & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \setminus S_i \\ 0 & \text{für } x \in S_i \end{cases}$$

Somit gilt

$$(3.31) \quad \begin{cases} |\text{grad}(\mu_i^{(\sigma)}(x))| \leq \frac{4}{\sigma} & \text{für } i = 1, \dots, r, \\ 0 < \sigma < \infty \text{ und alle } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

VI. Durch schrittweise Abänderung von h_0 nach der Rekursionsformel

$$(3.32) \quad h_i := h_{i-1} + \mu_i^{(\sigma)}(\cdot) y^{(i)} \text{ für } i = 1, \dots, r,$$

wobei die $\sigma_i (> 0)$ und $y^{(i)} \in \mathbb{R}^n$ geeignet gewählt werden müssen, wird in Abschnitt VIII des Beweises die gewünschte Abbildung $\tilde{h} := h_r$ konstruiert. Wegen $h_o \in C^1(\mathbb{R}^n)$ und (3.30) ist

$$(3.33) \quad h_i \in C^1(\mathbb{R}^n) \text{ für } i = 1, \dots, r.$$

Die $y^{(i)}$ werden so bestimmt, daß sie neben anderen Bedingungen auch der Abschätzung

$$(3.34) \quad |y^{(i)}| \leq \frac{1}{r} \min[\tau, \delta, \frac{C\sigma_i}{8n}] \text{ für } i = 1, \dots, r$$

genügen. Dies ergibt:

a) Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $i = 1, \dots, r$ ist

$$|h_i(x) - h_o(x)| = \left| \sum_{j=1}^i \mu_j^{(i)}(x) y^{(j)} \right| \leq \sum_{j=1}^i |\mu_j^{(i)}(x)| |y^{(j)}|.$$

Hieraus folgt wegen $|y^{(j)}| \leq \frac{1}{r} \min[\tau, \delta]$ (nach (3.34)) und

$$|\mu_j^{(i)}(x)| \leq 1 \text{ (nach (3.26) und (3.29))}:$$

$$|h_i(x) - h_o(x)| \leq \sum_{j=1}^i \frac{1}{r} \min[\tau, \delta] \leq \min[\tau, \delta].$$

Dies ergibt einerseits

$$(3.35) \quad |h_i(x) - h_o(x)| \leq \delta \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n \text{ und } i = 1, \dots, r$$

und andererseits nach (3.19) für alle $x \in \bar{G}$ und $i = 1, \dots, r$

$$|x - h_i(x)| \geq |x - h_o(x)| - |h_i(x) - h_o(x)| \geq 2\tau - \tau = \tau,$$

also

$$(3.36) \quad |x - h_i(x)| \geq \tau \text{ für alle } x \in \bar{G} \text{ und } i = 1, \dots, r.$$

b) Nach (3.32) ist für $i = 1, \dots, r$

$$\begin{aligned} & \sum_{k, l=1}^n \max_{z \in \text{col } G_i} \left[\left(\frac{\partial}{\partial z_k} (h_i(z)) \right)_l \right]^2 = \\ & = \sum_{k, l=1}^n \max_{z \in \text{col } G_i} \left[\left(\frac{\partial}{\partial z_k} (h_o(z)) \right)_l + \sum_{j=1}^i (y^{(j)})_l \frac{\partial}{\partial z_k} \mu_j^{(i)}(z) \right]^2 \leq \\ & \leq \sum_{k, l=1}^n \max_{z \in \text{col } G_i} \left[2 \left(\frac{\partial}{\partial z_k} (h_o(z)) \right)_l^2 + 2 \left(\sum_{j=1}^i (y^{(j)})_l \frac{\partial}{\partial z_k} \mu_j^{(i)}(z) \right)^2 \right] \leq \end{aligned}$$

$$\leq 2 \sum_{k, l=1}^n \max_{z \in \text{co}[G, l]} \left[\left(\frac{\partial}{\partial z_k} (h_0(z))_1 \right)^2 \right] + \\ + 2 \sum_{k, l=1}^n \max_{z \in \text{co}[G, l]} \left[\left(\sum_{j=1}^i (y^{(j)})_1 \frac{\partial}{\partial z_k} \mu_j^{(\sigma_j)}(z) \right)^2 \right].$$

Nach (3.18) ist

$$2 \sum_{k, l=1}^n \max_{z \in \text{co}[G, l]} \left[\left(\frac{\partial}{\partial z_k} (h_0(z))_1 \right)^2 \right] = \frac{1}{2} C^2,$$

und wegen $|y^{(j)}| \leq \frac{C \sigma_j}{8nr}$ (nach (3.34)) und (3.31) gilt:

$$2 \sum_{k, l=1}^n \max_{z \in \text{co}[G, l]} \left[\left(\sum_{j=1}^i (y^{(j)})_1 \frac{\partial}{\partial z_k} \mu_j^{(\sigma_j)}(z) \right)^2 \right] \leq \\ \leq 2 \sum_{k, l=1}^n \left(\sum_{j=1}^i |(y^{(j)})_1| \max_{z \in \text{co}[G, l]} \left| \frac{\partial}{\partial z_k} \mu_j^{(\sigma_j)}(z) \right| \right)^2 \leq \\ \leq 2 \sum_{k, l=1}^n \left(\sum_{j=1}^i |y^{(j)}| \max_{z \in \text{co}[G, l]} |\text{grad}(\mu_j^{(\sigma_j)}(z))| \right)^2 \leq \\ \leq 2 \sum_{k, l=1}^n \left(\sum_{j=1}^i \frac{C \sigma_j}{8nr} \frac{4}{\sigma_j} \right)^2 = 2 \sum_{k, l=1}^n \left(\frac{Ci}{2nr} \right)^2 = 2n^2 \left(\frac{Ci}{2nr} \right)^2 \leq \frac{1}{2} C^2.$$

Insgesamt erhält man also

$$\sum_{k, l=1}^n \max_{z \in \text{co}[G, l]} \left[\left(\frac{\partial}{\partial z_k} (h_i(z))_1 \right)^2 \right] \leq \\ \leq 2 \sum_{k, l=1}^n \max_{z \in \text{co}[G, l]} \left[\left(\frac{\partial}{\partial z_k} (h_0(z))_1 \right)^2 \right] + \\ + 2 \sum_{k, l=1}^n \max_{z \in \text{co}[G, l]} \left[\left(\sum_{j=1}^i (y^{(j)})_1 \frac{\partial}{\partial z_k} \mu_j^{(\sigma_j)}(z) \right)^2 \right] \leq \\ \leq \frac{1}{2} C^2 + \frac{1}{2} C^2 = C^2,$$

d.h. es ist

$$(3.37) \quad \left(\sum_{k, l=1}^n \max_{z \in \text{co}[G, l]} \left[\left(\frac{\partial}{\partial z_k} (h_i(z))_1 \right)^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \text{ für } i = 1, \dots, r.$$

Nach Hilfssatz 2 folgt daraus:

$$(3.38) \quad \left| h_i(x) - h_i(y) \right| \leq C |x - y| \text{ für } i = 1, \dots, r \\ \text{und alle } x, y \in G_1.$$

VII. Wählt man die σ_i so, daß insbesondere

$$(3.39) \quad 0 < \sigma_i \leq \min[\alpha, \frac{\beta}{4}] \text{ für } i = 1, \dots, r$$

ist (vgl. (3.20) und (3.24)), dann folgt:

Wegen $\sigma_j \leq \alpha$ für $j = 1, \dots, r$ und (3.24) ist

$$(3.40) \quad \bigcup_{j=1}^r (S_j)^{\frac{2}{3}\sigma_j} \subset G.$$

Da nach (3.28) und (3.29) $\mu_j^{(\sigma_j)}(\cdot) \langle \mathbb{R}^n \setminus (S_j)^{\frac{2}{3}\sigma_j} \rangle = 0$ und somit wegen (3.40) insbesondere $\mu_j^{(\sigma_j)}(\cdot) \langle \mathbb{R}^n \setminus G \rangle = 0$ ist, erhält man aufgrund von $h_i := h_0 + \sum_{j=1}^i \mu_j^{(\sigma_j)}(\cdot) y^{(j)}$ die Identität

$$(3.41) \quad h_i \langle \mathbb{R}^n \setminus G \rangle = h_0 \langle \mathbb{R}^n \setminus G \rangle \text{ für } i = 1, \dots, r.$$

Es sei $y \in \bigcup_{j=0}^{p-1} h_i^j(G)$ ($i \in \{1, \dots, r\}$). Dann gibt es ein $k_0 \in \{0, \dots, p-1\}$, so daß $y \in h_i^{k_0}(G)$ und $y \notin h_i^j(G)$ für $j = 0, \dots, k_0-1$ ist, und es existiert ein $x \in G$ mit $y = h_i^{k_0}(x)$. Wegen $y \notin h_i^j(G)$ für $j = 0, \dots, k_0-1$ ist

$$(3.42) \quad h_i^j(x) \notin G \text{ für } j = 1, \dots, k_0,$$

und es gilt:

a) Für $k_0 = 0$ ist $y \in G$.

b) Für $k_0 \geq 1$ ist wegen (3.41) und (3.42)

$$h_i^{k_0}(x) = h_0^{k_0-1}(h_i(x)). \text{ Daraus folgt mit Hilfe von (3.35):} \\ y = h_i^{k_0}(x) = h_0^{k_0-1}(h_i(x)) \in h_0^{k_0-1}([h_0(G)]^\delta).$$

Es liegen also alle $y \in \bigcup_{j=0}^{p-1} h_i^j(G)$ in $G \cup \bigcup_{j=0}^{p-2} h_0^j([h_0(G)]^\delta)$, d.h. es ist (vgl. (3.17))

$$(3.43) \quad \bigcup_{j=0}^{p-1} h_i^j(G) \subset G_1 \text{ für } i = 1, \dots, r.$$

Somit gilt die Lipschitzabschätzung von (3.38) insbesondere für alle $x, y \in \bigcup_{j=0}^{p-1} h_i^j(G)$. Die h_i ($i = 1, \dots, r$) erfüllen damit die Voraussetzungen von Hilfssatz 3 (siehe auch (3.20) und (3.36)). Es folgt:

$$(3.44) \quad \left[|x - h_i^j(x)| \geq \delta \text{ für } i = 1, \dots, r \text{ und} \right. \\ \left. \text{für alle } x \in \mathfrak{T}[h_i^p \langle G \rangle] \text{ und } j \in \{1, \dots, p-1\}. \right.$$

Wegen (3.21) und $\sigma_i \leq \frac{\delta}{4}$ (nach (3.39)) ist

$$\text{diam}((S_i)^{\mathfrak{F}_i}) = 2 \rho_{x^{(i)}} + 2 \sigma_i \leq 2 \frac{\delta}{4} + 2 \frac{\delta}{4} = \delta.$$

Aus (3.44) folgt deshalb (vgl. auch (3.40)):

$$(3.45) \quad \left[h_i^j(x) \notin (S_i)^{\mathfrak{F}_i} \text{ für } i = 1, \dots, r \text{ und für} \right. \\ \left. \text{alle } x \in \mathfrak{T}[h_i^p \langle (S_i)^{\mathfrak{F}_i} \rangle] \text{ und } j \in \{1, \dots, p-1\}. \right.$$

VIII. Es sei $i \in \{1, \dots, r\}$. Die Mengen H_k ($k = 0, \dots, r$) seien definiert durch

$$(3.46) \quad H_k := \overline{G \setminus G_0} \cup \bigcup_{j=1}^k S_j \text{ für } k = 0, \dots, r.$$

(Vgl. hierzu die Definitionen von G_0 und S_j ($j = 1, \dots, r$) in Abschnitt I und III des Beweises!)

Induktionsannahme: Für $j = 1, \dots, i-1$ gibt es σ_j und $y^{(j)}$, die (3.39) bzw. (3.34) erfüllen, so daß mit

$$h_{i-1} := h_0 + \sum_{j=1}^{i-1} \mu_j^{(\mathfrak{F}_j)}(\cdot) y^{(j)} \text{ gilt:}$$

$$(3.47) \quad J_{\text{id}-h_{i-1}}[x] \neq 0 \text{ für alle } x \in \mathfrak{T}[h_{i-1}^p \langle H_{i-1} \rangle].$$

Induktionsbehauptung: Es gibt ein σ_i und $y^{(i)}$, die (3.39) bzw. (3.34) erfüllen, so daß mit $h_i := h_{i-1} + \mu_i^{(\mathfrak{F}_i)}(\cdot) y^{(i)}$ gilt:

$$(3.48) \quad J_{\text{id}-h_i}[x] \neq 0 \text{ für alle } x \in \mathfrak{T}[h_i^p \langle H_i \rangle].$$

Der Induktionsanfang ist wegen $\mathfrak{T}[h_0^p \langle H_0 \rangle] = \emptyset$ (nach (3.16)) trivial.

Beweis der Induktionsbehauptung:

Die Menge $\mathfrak{T}[h_{i-1}^p \langle H_{i-1} \rangle]$ ist kompakt, denn sie ist

beschränkt (da $H_{i-1} \subset \bar{G}$ beschränkt ist) und abgeschlossen (da H_{i-1} abgeschlossen und h_{i-1}^P stetig ist). Angenommen, $\mathcal{F}[h_{i-1}^P \langle H_{i-1} \rangle]$ enthalte unendlich viele Punkte. Dann gibt es wegen der Kompaktheit von $\mathcal{F}[h_{i-1}^P \langle H_{i-1} \rangle]$ eine Folge $\{z^{(k)}\}_1^\infty \subset \mathcal{F}[h_{i-1}^P \langle H_{i-1} \rangle]$ mit $z^{(k_1)} \neq z^{(k_2)}$ für $k_1 \neq k_2$, so daß die $z^{(k)}$ für $k \rightarrow \infty$ gegen einen Punkt $z^{(0)} \in \mathcal{F}[h_{i-1}^P \langle H_{i-1} \rangle]$ konvergieren. Es ist dann $J_{id-h_{i-1}^P}[z^{(0)}] = 0$ im Widerspruch zu (3.47). $\mathcal{F}[h_{i-1}^P \langle H_{i-1} \rangle]$ und somit auch

$$(3.49) \quad N^{(i-1)} := \bigcup_{j=0}^{p-1} h_{i-1}^{-j}(\mathcal{F}[h_{i-1}^P \langle H_{i-1} \rangle])$$

enthalten also nur endlich viele Punkte, woraus folgt, daß

$$(3.50) \quad \alpha_i := \begin{cases} \text{dist}(S_i, N^{(i-1)} \setminus S_i) & \text{für } N^{(i-1)} \setminus S_i \neq \emptyset \\ \alpha & \text{für } N^{(i-1)} \setminus S_i = \emptyset \end{cases}$$

größer als Null ist. Man wählt nun

$$(3.51) \quad \sigma_i := \min[\alpha_i, \alpha, \frac{\delta}{4}].$$

Die Menge ⁶⁾

$$(3.52) \quad F_i := h_{i-1}^{-(p-1)} \left(\overline{(S_i)^{\frac{\delta}{4\sigma_i}} \setminus (S_i)^{\frac{\delta}{4\sigma_i}}} \right) \cap \bigcup_{j=0}^{p-1} h_{i-1}^{-j}(H_{i-1})$$

ist abgeschlossen, da $\overline{(S_i)^{\frac{\delta}{4\sigma_i}} \setminus (S_i)^{\frac{\delta}{4\sigma_i}}}$ und H_{i-1} abgeschlossen sind und h_{i-1} stetig ist. Angenommen, es existiere ein $x \in F_i$ mit $h_{i-1}^P(x) \neq x$. Dann gibt es (wegen $x \in F_i$) ein $j \in \{0, \dots, p-1\}$ mit $y := h_{i-1}^j(x) \in H_{i-1}$, und es ist $h_{i-1}^P(y) = h_{i-1}^P(h_{i-1}^j(x)) = h_{i-1}^{j+P}(x) = h_{i-1}^j(x) = y$, d.h. es gilt

$$(3.53) \quad y \in \mathcal{F}[h_{i-1}^P \langle H_{i-1} \rangle].$$

⁶⁾ Für alle $S \subset \mathbb{R}^n$ und $k \in \mathbb{N}$ sei

$h_{i-1}^{-k}(S) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid h_{i-1}^k(x) \in S\}.$

Der Punkt $z := h_{i-1}^{p-1}(x)$ gehört einerseits nach (3.52) zu $(S_i)^{\frac{1}{2}\epsilon_i} \setminus (S_i)^{\frac{1}{2}\epsilon_i} \subset (S_i)^{\frac{1}{2}\epsilon_i} \setminus S_i$ und andererseits wegen

$z = h_{i-1}^{p-1}(x) = h_{i-1}^{p-1-j}(y)$ und (3.53) zu $h_{i-1}^{p-1-j}(\mathcal{F}[h_{i-1}^p \langle H_{i-1} \rangle]) \subset N^{(i-1)}(\text{vgl. (3.49)})$. Es ist also

$$z \in ((S_i)^{\frac{1}{2}\epsilon_i} \setminus S_i) \cap N^{(i-1)} = (S_i)^{\frac{1}{2}\epsilon_i} \cap (N^{(i-1)} \setminus S_i)$$

im Widerspruch zu (3.50) und (3.51). F_i enthält also keine Fixpunkte von h_{i-1}^p , und somit gilt, da F_i abgeschlossen und $h_{i-1}^p(F_i) \subset h_{i-1}((S_i)^{\epsilon_i})$ beschränkt ist:

$$(3.54) \quad 0 < \gamma_i := \begin{cases} \min_{x \in F_i} |x - h_{i-1}^p(x)| & \text{für } F_i \neq \emptyset \\ 1 & \text{für } F_i = \emptyset. \end{cases}$$

Es sei $W_{i-1} := \{x \in \overline{G_1} \mid J_{\text{id}-h_{i-1}^p}[x] = 0\}$. Nach dem Sardischen Lemma (siehe A. Sard [21] oder auch G. de Rham [18] und J. T. Schwartz [23]) hat die Menge $(\text{id} - h_{i-1}^p)(W_{i-1})$ das Lebesguesche Maß Null. Daraus folgt insbesondere, daß die Kugel $K(0, \frac{1}{r} \min[\frac{1}{2} r \cdot \gamma_i, \tau, \delta, \frac{C\sigma_i}{8n}])$ nicht vollständig in $(\text{id} - h_{i-1}^p)(W_{i-1})$ enthalten ist, d.h. es existiert ein $y^{(i)} \in \mathbb{R}^n$ mit

$$(3.55) \quad |y^{(i)}| \leq \frac{1}{r} \min[\frac{1}{2} r \cdot \gamma_i, \tau, \delta, \frac{C\sigma_i}{8n}],$$

so daß die Gleichung $x - h_{i-1}^p(x) = y^{(i)}$ keine Lösung $x' \in \overline{G_1}$ mit $J_{\text{id}-h_{i-1}^p}[x'] = 0$ besitzt. Wie am Anfang des Beweises der Induktionsbehauptung zeigt man auch hier, daß die Gleichung $x - h_{i-1}^p(x) = y^{(i)}$ nur endlich viele Lösungen in $\overline{G_1}$ besitzt.

Man definiert nun $h_i := h_{i-1} + \mu_i^{(i)}(\cdot) y^{(i)}$. Wegen (3.51) und (3.55) erfüllen σ_i und $y^{(i)}$ die Bedingungen (3.39) und (3.34). Es bleibt zu zeigen, daß h_i die Bedingung (3.48) erfüllt:

Zunächst einige triviale Folgerungen aus (3.28), (3.29)

und der obigen Definition von h_i :

Wegen $\mu_i^{(\epsilon_i)}(\cdot) \langle \mathbb{R}^n \setminus (S_i)^{\frac{1}{3}\epsilon_i} \rangle \equiv 0$ ist

$$(3.56) \quad h_i \langle \mathbb{R}^n \setminus (S_i)^{\frac{1}{3}\epsilon_i} \rangle = h_{i-1} \langle \mathbb{R}^n \setminus (S_i)^{\frac{1}{3}\epsilon_i} \rangle.$$

Analog folgt aus $\mu_i^{(\epsilon_i)}(\cdot) \langle (S_i)^{\frac{1}{3}\epsilon_i} \rangle \equiv 1$

$$(3.57) \quad h_i(x) = h_{i-1}(x) + y^{(i)} \text{ für alle } x \in (S_i)^{\frac{1}{3}\epsilon_i}.$$

Falls für ein $j \in \mathbb{N}$ die Punkte $x, h_1(x), \dots, h_1^{j-1}(x) \in \mathbb{R}^n \setminus (S_i)^{\frac{1}{3}\epsilon_i}$ sind, dann gilt nach (3.56)

$$\begin{aligned} h_i^j(x) &= h_i(h_i^{j-1}(x)) = h_{i-1}(h_i^{j-1}(x)) = h_{i-1}(h_i(h_i^{j-2}(x))) = \\ &= h_{i-1}(h_{i-1}(h_i^{j-2}(x))) = h_{i-1}^2(h_i^{j-2}(x)) = \dots = h_{i-1}^j(x), \end{aligned}$$

d.h. es ist

$$(3.58) \quad \begin{cases} h_i^j(x) = h_{i-1}^j(x) \text{ für } j \in \mathbb{N}, \text{ wenn die Punkte} \\ x, h_1(x), \dots, h_1^{j-1}(x) \in \mathbb{R}^n \setminus (S_i)^{\frac{1}{3}\epsilon_i} \text{ sind.} \end{cases}$$

Aus (3.56) und (3.57) folgt trivial eine wichtige Aussage über die Jakobi-Matrizen: Es ist

$$(3.59) \quad \begin{cases} \mathcal{M}_{h_i}[x] = \mathcal{M}_{h_{i-1}}[x] \text{ für alle} \\ x \in (S_i)^{\frac{1}{3}\epsilon_i} \cup [\mathbb{R}^n \setminus (S_i)^{\frac{1}{3}\epsilon_i}]. \end{cases}$$

Damit beweist man

$$(3.60) \quad \begin{cases} J_{\text{id}-h_i^p}[x] = J_{\text{id}-h_{i-1}^p}[x], \\ \text{falls } x, h_1(x), \dots, h_1^{p-2}(x) \in \mathbb{R}^n \setminus (S_i)^{\frac{1}{3}\epsilon_i} \\ \text{und } h_1^{p-1}(x) \in (S_i)^{\frac{1}{3}\epsilon_i} \cup [\mathbb{R}^n \setminus (S_i)^{\frac{1}{3}\epsilon_i}] \text{ ist,} \end{cases}$$

denn nach (3.58) und (3.59) gilt (vgl. (3.4)):

$$\begin{aligned} J_{\text{id}-h_i^p}[x] &= \\ &= \det(J - \mathcal{M}_{h_i}[h_1^{p-1}(x)] \cdot \mathcal{M}_{h_i}[h_1^{p-2}(x)] \cdot \dots \cdot \mathcal{M}_{h_i}[x]) = \\ &= \det(J - \mathcal{M}_{h_{i-1}}[h_1^{p-1}(x)] \cdot \mathcal{M}_{h_{i-1}}[h_1^{p-2}(x)] \cdot \dots \cdot \mathcal{M}_{h_{i-1}}[x]) = \end{aligned}$$

$$= \det(I - \mathfrak{M}_{h_{i-1}}[h_{i-1}^{p-1}(x)] \cdot \mathfrak{M}_{h_{i-1}}[h_{i-1}^{p-2}(x)] \cdot \dots \cdot \mathfrak{M}_{h_{i-1}}[x]) = \\ = J_{\text{id}-h_{i-1}^p}[x].$$

Nachweis von (3.48):

Es sei $x \in \mathfrak{T}[h_i^p(H_i)]$. Man muß zeigen, daß $J_{\text{id}-h_i^p}[x] \neq 0$ ist.

Die Menge $Z_x := \{x, h_i(x), \dots, h_i^{p-1}(x)\}$ hat die folgenden wichtigen Eigenschaften (triviale Folgerungen aus $h_i^p(x) = x$):

- a) Z_x enthält alle Punkte $h_i^j(x)$ ($j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$).
- b) Alle $y \in Z_x$ sind Fixpunkte von h_i^p .
- c) Zu je zwei Punkten $y', y'' \in Z_x$ gibt es ein $j \in \{0, \dots, p-1\}$ mit $y'' = h_i^j(y')$.
- d) Für alle $y \in Z_x$ gilt $Z_x = \{y, h_i(y), \dots, h_i^{p-1}(y)\}$.

Nach b) und (3.45) können nur die folgenden zwei Fälle eintreten:

- 1) $Z_x \cap (S_i)^{\frac{4}{3}e_i} = \emptyset$.
- 2) $Z_x \cap (S_i)^{\frac{4}{3}e_i}$ enthält genau einen Punkt y .

Im 1. Falle folgt aus (3.58), daß $h_{i-1}^p(x) = h_i^p(x)$ ist.

Wegen $h_i^p(x) = x$ ist damit auch $h_{i-1}^p(x) = x$. Zudem liegt x in $\mathfrak{T}[h_i^p(H_i)] \setminus (S_i)^{\frac{4}{3}e_i} \subset H_i \setminus S_i \subset H_{i-1}$ (vgl. (3.46)), d.h.

es ist $x \in \mathfrak{T}[h_{i-1}^p(H_{i-1})]$. Nach (3.47) ist deshalb

$J_{\text{id}-h_{i-1}^p}[x] \neq 0$. Daraus erhält man $J_{\text{id}-h_i^p}[x] \neq 0$, da nach (3.60) $J_{\text{id}-h_{i-1}^p}[x] = J_{\text{id}-h_i^p}[x]$ ist.

Im 2. Falle beschränke man sich zunächst auf $y \in (S_i)^{\frac{4}{3}e_i}$.

Es sei $y' := h_i(y)$. Nach (3.45) sind die Punkte

$y', h_i(y'), \dots, h_i^{p-2}(y') \in \mathbb{R}^n \setminus (S_i)^{6e_i}$. Aus (3.58) folgt dann,

daß $h_i^{p-1}(y') = h_{i-1}^{p-1}(y')$ ist. Damit erhält man

$$y' - h_{i-1}^p(y') = y' - h_{i-1}(h_{i-1}^{p-1}(y')) = y' - h_{i-1}(h_i^{p-1}(y')).$$

Wegen $y' = h_i(y)$ und $h_i^{p-1}(y') = h_i^{p-1}(h_i(y)) = h_i^p(y) = y$ gilt weiter

$$y' - h_{i-1}(h_i^{p-1}(y')) = h_i(y) - h_{i-1}(y).$$

Da aufgrund von $y \in (S_i)^{\frac{1}{p}}$ und (3.57) $h_i(y) - h_{i-1}(y) = y^{(u)}$ ist, ergibt sich insgesamt:

$$y' - h_{i-1}^p(y') = y' - h_{i-1}(h_i^{p-1}(y')) = h_i(y) - h_{i-1}(y) = y^{(u)}.$$

Aus der Konstruktion von $y^{(u)}$ (siehe Seite 47) folgt dann

$J_{\text{id}-h_{i-1}^p}[y'] \neq 0$. Nach (3.60) ist deshalb auch $J_{\text{id}-h_i^p}[y'] \neq 0$, woraus man schließlich mit Hilfe von (3.2) $J_{\text{id}-h_i^p}[x] \neq 0$ erhält (denn es ist $y' \in Z_x$ und somit $y' = h_i^j(x)$ mit einem gewissen $j \in \{0, \dots, p-1\}$).

Es bleibt nur noch der Fall $y \in (S_i)^{\frac{1}{p}} \setminus (S_i)^{\frac{1}{p}}$ zu behandeln:

Es sei

$$(3.61) \quad y' := h_i(y).$$

Nach (3.45) gilt

$$(3.62) \quad y', h_i(y'), \dots, h_i^{p-2}(y') \in \mathbb{R}^n \setminus (S_i)^{\frac{1}{p}},$$

woraus mit Hilfe von (3.58) folgt, daß

$$(3.63) \quad h_i^j(y') = h_{i-1}^j(y') \text{ für } j = 0, \dots, p-1$$

ist. Aus (3.61), (3.62) und $y \in (S_i)^{\frac{1}{p}} \setminus (S_i)^{\frac{1}{p}} \subset \mathbb{R}^n \setminus S_i$

erhält man die Beziehung $Z_x \cap S_i = \emptyset$ (denn es ist

$$Z_x = \{y, h_i(y), \dots, h_i^{p-1}(y)\} = \{y, y', h_i(y'), \dots, h_i^{p-2}(y')\}).$$

Insbesondere ist $x \notin S_i$ und somit $x \in \mathcal{F}[h_i^p(H_i)] \setminus S_i \subset$

$\subset H_i \setminus S_i \subset H_{i-1}$, also

$$(3.64) \quad x \in H_{i-1}.$$

Da $y' \in Z_x$ ist, gibt es ein $j \in \{0, \dots, p-1\}$ mit $x = h_i^j(y')$.
Wegen (3.63) ist dann $x = h_{i-1}^j(y')$, woraus mit Hilfe
von (3.64)

$$(3.65) \quad y' \in \bigcup_{j=0}^{p-1} h_{i-1}^{-j}(H_{i-1})$$

folgt. Zum anderen ist $y = h_i^p(y) = h_i^{p-1}(h_i(y)) = h_i^{p-1}(y')$
(vgl. (3.61)) und somit nach (3.63)

$$(3.66) \quad y = h_{i-1}^{p-1}(y').$$

Wegen $y \in (S_i)^{\frac{2}{3}\epsilon_i} \setminus (S_i)^{\frac{4}{3}\epsilon_i}$ erhält man daraus

$$(3.67) \quad y' \in h_{i-1}^{-(p-1)}\left((S_i)^{\frac{2}{3}\epsilon_i} \setminus (S_i)^{\frac{4}{3}\epsilon_i}\right).$$

(3.65) und (3.67) ergeben zusammengefaßt $y' \in F_i$ (vgl. (3.52)).

Mit (3.54) folgt dann:

$$0 < \gamma_i = \min_{z \in F_i} |z - h_{i-1}^p(z)| \leq |y' - h_{i-1}^p(y')|.$$

Setzt man hier (3.61) und (3.66) ein, so erhält man

$$|y' - h_{i-1}^p(y')| = |y' - h_{i-1}(h_{i-1}^{p-1}(y'))| = |h_i(y) - h_{i-1}(y)|.$$

Nach der Definition von h_i gilt weiter

$$|h_i(y) - h_{i-1}(y)| = |\mu_i^{(\epsilon_i)}(y) y^{(i)}| \leq |\mu_i^{(\epsilon_i)}(y)| |y^{(i)}|,$$

und aus (3.26), (3.29) und (3.55) folgt

$$|\mu_i^{(\epsilon_i)}(y)| |y^{(i)}| \leq \frac{1}{r} \min\left[\frac{1}{2} r \cdot \gamma_i, \tau, \delta, \frac{C\sigma_i}{8n}\right] \leq \frac{1}{2} \gamma_i,$$

so daß man insgesamt erhält:

$$\begin{aligned} 0 < \gamma_i &\leq |y' - h_{i-1}^p(y')| = |h_i(y) - h_{i-1}(y)| \leq \\ &\leq |\mu_i^{(\epsilon_i)}(y)| |y^{(i)}| \leq \frac{1}{2} \gamma_i. \end{aligned}$$

Dieser Widerspruch zeigt, daß der Fall $y \in (S_i)^{\frac{2}{3}\epsilon_i} \setminus (S_i)^{\frac{4}{3}\epsilon_i}$
nicht eintreten kann.

Damit ist die Induktionsbehauptung bewiesen.

IX. Als Konsequenz dieses Induktionsbeweises erhält man schließlich für $i = r$:

Es ist $J_{\text{id}-h_r^p}[x] \neq 0$ für alle $x \in \mathfrak{F}[h_r^p\langle H_r \rangle]$. Somit erfüllt $\tilde{h} := h_r$ die Bedingung (3.11), denn es ist $H_r = \bar{G}$ wegen (3.46) und $G_0 \subset \bigcup_{i=1}^r S_i \subset G$ (vgl. (3.22) und (3.23)). Da aufgrund von (3.33) und (3.35) $\tilde{h} (:= h_r)$ auch den Bedingungen (3.9) und (3.10) genügt, ist das Lemma bewiesen.

q.e.d.

4. Der Beweis von Lemma 1

Für dieses Kapitel wird generell vorausgesetzt, daß die Mengen M und N sowie die Abbildung g den Voraussetzungen von Lemma 1 genügen.

Zusätzlich wird jedoch auch angenommen, daß

$$(4.1) \quad \mathcal{F}[g\langle M \rangle] = \emptyset$$

sei. Wegen $\mathcal{F}[g\langle \bar{M} \rangle] \subset \mathcal{F}[g^p\langle \bar{M} \rangle]$ und $\mathcal{F}[g^p\langle \bar{M} \rangle] \subset M$ (vgl. (0.6)) ist dann sogar $\mathcal{F}[g\langle \bar{M} \rangle] = \emptyset$, woraus in bekannter Weise aufgrund von (0.5) folgt, daß

$$(4.2) \quad \alpha := \inf_{x \in \bar{M}} \|x - g(x)\| > 0$$

ist.

Zum Beweis von Lemma 1 leitet man aus der Annahme (4.1) einen Widerspruch ab. Hierzu wird zunächst der Operator g schrittweise abgeändert, bis man eine auf einem Euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ (mit noch zu bestimmendem $n \in \mathbb{N}$) definierte stetig differenzierbare Abbildung $g_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ erhält, die auf einer gewissen nichtleeren, beschränkten Menge $T = \bar{T} \subset \mathbb{R}^n$ fixpunktfrei ist und zudem noch die Eigenschaften (0.8), (0.9) und (0.10) besitzt. Mit Lemma 4 ist gesichert, daß (0.9) erfüllt werden kann. Die Eigenschaften (0.8), (0.10) und $\mathcal{F}[g_1\langle T \rangle] = \emptyset$ müssen aus (0.6), (0.7) und (4.1) abgeleitet werden. Zu diesem Zweck wird das Lemma 6 bewiesen, zu dessen Vorbereitung Lemma 5 dient, in dem die bekannte Aussage, daß auf kompakten Mengen stetige Funktionen gleichmäßig stetig sind, etwas verallgemeinert wird.

LEMMA 5. Es sei E ein Banachraum, H eine Teilmenge von E
und G eine kompakte Teilmenge von H. Die Abbildung h: H → E
sei in allen Punkten x ∈ G stetig. Dann existiert zu jedem
ε > 0 ein δ(ε) > 0, so daß gilt:

$$(4.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Es ist } \|h(x) - h(y)\| \leq \epsilon \text{ für alle} \\ x, y \in G^{\delta(\epsilon)} \cap H \text{ mit } \|x - y\| \leq \delta(\epsilon). \end{array} \right.$$

$$(4.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Es ist } \text{dist}(h(G_0), h(x)) \leq \epsilon \text{ für alle} \\ \text{nichtleeren } G_0 \subset G \text{ und } x \in (G_0)^{\delta(\epsilon)} \cap H. \end{array} \right.$$

Beweis: Da der Fall $G = \emptyset$ trivial ist, kann man sich im
 folgenden auf $G \neq \emptyset$ beschränken.

Da h in allen $x \in G$ stetig ist, gibt es zu jedem $\epsilon > 0$
 und $x \in H$ ein $\delta(\epsilon, x) > 0$, so daß $\|h(x) - h(y)\| \leq \epsilon$ ist für
 alle $y \in K(x, \delta(\epsilon, x)) \cap H$.

Es sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wegen der Kompaktheit von G
 gibt es endlich viele Punkte $x_1, x_2, \dots, x_m \in G$, so daß

$$(4.5) \quad G \subset \bigcup_{i=1}^m K(x_i, \frac{1}{2} \delta(\frac{\epsilon}{2}, x_i))$$

ist. Da G kompakt und $\bigcup_{i=1}^m K(x_i, \frac{1}{2} \delta(\frac{\epsilon}{2}, x_i))$ offen ist, gilt
 außerdem

$$(4.6) \quad \tau(\epsilon) := \text{dist}\left(G, \partial \left[\bigcup_{i=1}^m K(x_i, \frac{1}{2} \delta(\frac{\epsilon}{2}, x_i)) \right] \right) > 0.$$

Man setze nun

$$(4.7) \quad \delta(\epsilon) := \min \left[\tau(\epsilon), \frac{1}{2} \delta(\frac{\epsilon}{2}, x_1), \dots, \frac{1}{2} \delta(\frac{\epsilon}{2}, x_m) \right].$$

Es seien $x, y \in G^{\delta(\epsilon)} \cap H$ mit $\|x - y\| \leq \delta(\epsilon)$. Dann gibt
 es ein $r \in \{1, \dots, m\}$ mit $x \in K(x_r, \frac{1}{2} \delta(\frac{\epsilon}{2}, x_r))$, denn nach
 (4.5), (4.6) und (4.7) ist

$$G^{\delta(\epsilon)} \subset \bigcup_{i=1}^m K(x_i, \frac{1}{2} \delta(\frac{\epsilon}{2}, x_i)).$$

Es folgt (vgl. (4.7)):

$$\|y - x_r\| \leq \|x - y\| + \|x - x_r\| \leq \delta(\epsilon) + \frac{1}{2} \delta(\frac{\epsilon}{2}, x_r) \leq \delta(\frac{\epsilon}{2}, x_r).$$

Somit ist

$$\|h(x) - h(y)\| \leq \|h(x) - h(x_r)\| + \|h(y) - h(x_r)\| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

d.h. (4.3) ist bewiesen.

Es sei $\emptyset \neq G_0 \subset G$ und $x \in (G_0)^{\delta(\epsilon)} \cap H$. Dann gibt es ein $y \in \overline{G_0}$ mit $\|x - y\| \leq \delta(\epsilon)$ (denn $\overline{G_0} (\subset G)$ ist kompakt).

Nach (4.3) ist $\|h(x) - h(y)\| \leq \epsilon$ und folglich auch

$$\text{dist}(h(G_0), h(x)) \leq \epsilon. \quad \text{q.e.d.}$$

Im folgenden wird zweckmäßigerweise die Abkürzung

$$(4.8) \quad F := \mathcal{F}[g^P(\overline{M})]$$

verwendet. Aus (0.7) folgt, daß $F \neq \emptyset$ ist. Außerdem ist

$$(4.9) \quad F \text{ kompakt,}$$

denn F ist einerseits wegen der Stetigkeit von $g^P(\overline{M})$

(vgl. (0.4)) abgeschlossen und andererseits eine Teilmenge

der kompakten Menge $\overline{g^P(\overline{M})}$ ($g^P(\overline{M})$ ist kompakt, da $g^P(\overline{M})$

vollstetig (vgl. (0.4)) und M beschränkt ist).

F ist also eine kompakte Teilmenge der offenen Menge M

(vgl. (0.6)), und folglich gibt es ein $\epsilon' > 0$ mit $F^{\epsilon'} \subset M$.

Nach (4.4) existiert zu diesem ϵ' ein ϵ_0 mit $0 < \epsilon_0 \leq \epsilon'$,

so daß $\text{dist}(g(F), g(x)) \leq \epsilon'$ ist für alle $x \in F^{\epsilon_0}$, was wegen

$g(F) = F$ (nach (0.6)) gleichbedeutend ist mit $g(F^{\epsilon_0}) \subset F^{\epsilon'}$.

Es gilt also

$$(4.10) \quad \overline{g(F^{\epsilon_0})} \subset \overline{F^{\epsilon'}} = F^{\epsilon'} \subset M \subset N.$$

Die Menge $\overline{g(M)}$ ist kompakt, da $g(M)$ vollstetig

(vgl. (0.5)) und M beschränkt ist. Damit ist auch $\overline{g(F^{\epsilon_0})}$ kompakt, denn wegen $\epsilon_0 \leq \epsilon'$ und (4.10) ist $\overline{g(F^{\epsilon_0})} \subset \overline{g(F^{\epsilon'})} \subset \overline{g(M)}$. Man kann deshalb Lemma 5 für $G := \overline{g(F^{\epsilon_0})}$, $H := N$ und $h := g$ anwenden und eine Funktion $\delta(\cdot): \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ ($\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$) definieren, welche die in Lemma 5 gemachten Aussagen erfüllt. $\delta(\cdot)$ sei so gewählt, daß es zusätzlich der Bedingung

$$(4.11) \quad \delta(\epsilon) \leq \epsilon \text{ für alle } \epsilon > 0$$

genügt. Mit Hilfe der Funktionen $\delta^{(j)}(\cdot): \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ ($j = 0, 1, \dots$):

$$(4.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta^{(0)}(\epsilon) := \epsilon \\ \delta^{(j)}(\epsilon) := \delta\left(\frac{1}{2} \delta^{(j-1)}(\epsilon)\right) \quad (j \in \mathbb{N}) \end{array} \right\} \text{ für alle } \epsilon \in \mathbb{R}^+$$

wird nun definiert:

$$(4.13) \quad \delta_0 := \delta^{(p-1)}(\epsilon_0)$$

und

$$(4.14) \quad \epsilon_1 := \frac{1}{2} \inf_{x \in \overline{F^{\epsilon_0} \setminus F^{\delta_0}}} \|x - g^D(x)\|.$$

Aus $\epsilon_0 > 0$ folgt trivial, daß $\delta_0 > 0$ ist. Die Menge $\overline{F^{\epsilon_0} \setminus F^{\delta_0}}$ enthält keine Fixpunkte von g^D , denn es ist

$$(4.15) \quad \overline{F^{\epsilon_0} \setminus F^{\delta_0}} \subset F^{\epsilon_0} \subset F^{\epsilon'} \subset M$$

und $\mathcal{T}[g^D(\overline{M})] \cap \overline{F^{\epsilon_0} \setminus F^{\delta_0}} = F \cap \overline{F^{\epsilon_0} \setminus F^{\delta_0}} = \emptyset$. Da zudem wegen

(4.15) und der Vollstetigkeit von $g^D(\overline{M})$ (nach (0.4))

$g^D(\overline{F^{\epsilon_0} \setminus F^{\delta_0}})$ vollstetig ist, ergibt sich, daß $\epsilon_1 > 0$ ist.

Damit ist auch

$$(4.16) \quad \delta_1 := \min[\delta^{(p-1)}(\epsilon_0), \delta^{(p-1)}(\epsilon_1), \frac{\alpha}{2}] > 0,$$

denn es ist $\epsilon_0 > 0$, $\epsilon_1 > 0$ und $\alpha > 0$ (vgl. (4.2)).

LEMMA 6. Es seien die Voraussetzungen von Lemma 1 erfüllt (wobei allerdings (O.7) hier nicht notwendig ist). E_1 sei ein linearer, abgeschlossener Teilraum von E . Dann gilt mit den obigen Definitionen von $\alpha, \delta_0, \delta_1, \epsilon_0$ und ϵ_1 : Jede Abbildung $\tilde{g}: F^{\epsilon_0} \cap E_1 \rightarrow E_1$ mit $\|\tilde{g}(x) - g(x)\| \leq \delta_1$ für alle $x \in F^{\epsilon_0} \cap E_1$ hat die Eigenschaften

$$(4.17) \quad \|x - \tilde{g}(x)\| \geq \frac{\alpha}{2} \text{ für alle } x \in F^{\delta_0} \cap E_1$$

$$(4.18) \quad \begin{cases} \tilde{g}^j(F^{\delta_0} \cap E_1) \subset F^{\epsilon_0} \cap E_1 \text{ für } j = 1, \dots, p-1, \\ \text{d.h. es ist } F^{\delta_0} \cap E_1 \subset D[\tilde{g}^p] \end{cases}$$

$$(4.19) \quad \|\tilde{g}^p(x) - g^p(x)\| \leq \epsilon_1 \text{ für alle } x \in F^{\delta_0} \cap E_1$$

$$(4.20) \quad \mathcal{F}[\tilde{g}^p(F^{\delta_0} \cap E_1)] = \tilde{g}(\mathcal{F}[\tilde{g}^p(F^{\delta_0} \cap E_1)]) \subset F^{\delta_0} \cap E_1 \quad 7).$$

Beweis: I. Nach (4.13) und (4.16) ist

$$\delta_1 \leq \delta_0 = \delta^{(p-1)}(\epsilon_0)$$

und nach (4.11) und (4.12)

$$\delta^{(p-1)}(\epsilon_0) \leq \frac{1}{2} \delta^{(p-2)}(\epsilon_0) \leq \frac{1}{4} \delta^{(p-3)}(\epsilon_0) \leq \dots \leq \frac{1}{2^{p-1}} \delta^{(0)}(\epsilon_0) = \frac{1}{2^{p-1}} \epsilon_0,$$

also insgesamt

$$(4.21) \quad \begin{cases} \delta_1 \leq \delta_0 = \delta^{(p-1)}(\epsilon_0) \leq \frac{1}{2} \delta^{(p-2)}(\epsilon_0) \leq \frac{1}{4} \delta^{(p-3)}(\epsilon_0) \leq \dots \\ \dots \leq \frac{1}{2^{p-1}} \delta^{(0)}(\epsilon_0) = \frac{1}{2^{p-1}} \epsilon_0. \end{cases}$$

Entsprechend erhält man aus (4.11), (4.12) und (4.16)

$$(4.22) \quad \begin{cases} \delta_1 \leq \delta^{(p-1)}(\epsilon_1) \leq \frac{1}{2} \delta^{(p-2)}(\epsilon_1) \leq \frac{1}{4} \delta^{(p-3)}(\epsilon_1) \leq \dots \\ \dots \leq \frac{1}{2^{p-1}} \delta^{(0)}(\epsilon_1) = \frac{1}{2^{p-1}} \epsilon_1. \end{cases}$$

II. Beweis von (4.17):

Wegen $\delta_0 \leq \epsilon_0$ (vgl. (4.21)) und $F^{\epsilon_0} \subset M$ (nach (4.15))

7) Es ist $F^{\delta_0} :=$ Menge der inneren Punkte von F^{δ_0} .

ist $F^{\delta_0} \cap E_1 \subset F^{\epsilon_0} \cap E_1 \subset M$. Die Ungleichungen $\|x - g(x)\| \geq \alpha$ (vgl. (4.2)) und $\|\tilde{g}(x) - g(x)\| \leq \delta_1$ gelten somit für alle $x \in F^{\delta_0} \cap E_1$. Unter Berücksichtigung von $\delta_1 \leq \frac{\alpha}{2}$ (nach (4.16)) folgt für alle $x \in F^{\delta_0} \cap E_1$:

$$\|x - \tilde{g}(x)\| \geq \|x - g(x)\| - \|g(x) - \tilde{g}(x)\| \geq \alpha - \delta_1 \geq \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$

III. Es sei $j \in \{1, \dots, p-1\}$ und $z \in F^{\delta^{(p-j)}(\epsilon_0)} \cap E_1$. Da F kompakt ist, gibt es ein $y \in F$ mit $\|z - y\| \leq \delta^{(p-j)}(\epsilon_0)$. Es ist $F = g(F) \subset \overline{g(F^{\epsilon_0})}$ (vgl. (0.6) und (4.8)) und $F^{\delta^{(p-j)}(\epsilon_0)} \cap E_1 \subset \left(\overline{g(F^{\epsilon_0})}\right)^{\delta^{(p-j)}(\epsilon_0)}$.

Aufgrund von (4.12) und der Definition von $\delta(\cdot)$ auf Seite 56 ist somit

$$\|g(z) - g(y)\| \leq \frac{1}{2} \delta^{(p-j-1)}(\epsilon_0),$$

so daß unter Berücksichtigung von $\delta_1 \leq \frac{1}{2} \delta^{(p-j-1)}(\epsilon_0)$ (nach (4.21)) folgt:

$$\begin{aligned} \|\tilde{g}(z) - g(y)\| &\leq \|\tilde{g}(z) - g(z)\| + \|g(z) - g(y)\| \leq \\ &\leq \delta_1 + \frac{1}{2} \delta^{(p-j-1)}(\epsilon_0) \leq \frac{1}{2} \delta^{(p-j-1)}(\epsilon_0) + \frac{1}{2} \delta^{(p-j-1)}(\epsilon_0) = \delta^{(p-j-1)}(\epsilon_0). \end{aligned}$$

Wegen $g(y) \in g(F) = F$ ist somit

$$\tilde{g}(z) \in F^{\delta^{(p-j-1)}(\epsilon_0)}.$$

Da zudem $\tilde{g}(z) \in E_1$ ist, erhält man

$$(4.23) \quad \tilde{g}(F^{\delta^{(p-j)}(\epsilon_0)} \cap E_1) \subset F^{\delta^{(p-j-1)}(\epsilon_0)} \cap E_1 \text{ für } j = 1, \dots, p-1.$$

IV. Beweis von (4.18):

Es sei $j \in \{1, \dots, p-1\}$.

Induktionsannahme: $\tilde{g}^{j-1}(F^{\delta_0} \cap E_1) \subset F^{\delta^{(p-j)}(\epsilon_0)} \cap E_1$

Induktionsbehauptung: $\tilde{g}^j(F^{\delta_0} \cap E_1) \subset F^{\delta^{(p-j-1)}(\epsilon_0)} \cap E_1$

Während der Induktionsanfang wegen

$$\tilde{g}^0(F^{\delta_0} \cap E_1) = F^{\delta_0} \cap E_1 = F^{\delta^{(p-1)}(\epsilon_1)} \cap E_1$$

gesichert ist, folgt die Induktionsbehauptung sofort aus

(4.23). Damit ist (4.18) bewiesen, denn nach (4.21) ist

$$F^{\delta^{(p-j)}(\epsilon_1)} \subset F^{\epsilon_0} \text{ für } j = 1, \dots, p.$$

V. Es ist

$$(4.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|\tilde{g}(y) - g(z)\| \leq \delta^{(p-j-1)}(\epsilon_1) \text{ für } j = 1, \dots, p-1 \\ \text{und alle } y \in F^{\epsilon_0} \cap E_1 \text{ und } z \in g(F^{\epsilon_0}) \\ \text{mit } \|y - z\| \leq \delta^{(p-j)}(\epsilon_1), \end{array} \right.$$

denn es gilt:

$$\begin{aligned} \|\tilde{g}(y) - g(z)\| &\leq \|\tilde{g}(y) - g(y)\| + \|g(y) - g(z)\| \leq \\ &\leq \delta_1 + \|g(y) - g(z)\|. \end{aligned}$$

Wegen $z \in \overline{g(F^{\epsilon_0})}$ und $\|y - z\| \leq \delta^{(p-j)}(\epsilon_1)$ ist $y \in \left(\overline{g(F^{\epsilon_0})}\right)^{\delta^{(p-j)}(\epsilon_1)}$.

Nach (4.3), (4.12) und der Definition von $\delta(\cdot)$ gilt dann

$$\|g(y) - g(z)\| \leq \frac{1}{2} \delta^{(p-j-1)}(\epsilon_1),$$

und folglich ist wegen $\delta_1 \leq \frac{1}{2} \delta^{(p-j-1)}(\epsilon_1)$ (nach (4.22))

$$\begin{aligned} \|\tilde{g}(y) - g(z)\| &\leq \delta_1 + \|g(y) - g(z)\| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \delta^{(p-j-1)}(\epsilon_1) + \frac{1}{2} \delta^{(p-j-1)}(\epsilon_1) = \delta^{(p-j-1)}(\epsilon_1). \end{aligned}$$

VI. Beweis von (4.19):

Es sei $x \in F^{\delta_0} \cap E_1$ und $j \in \{1, \dots, p-1\}$.

Induktionsannahme: $\|\tilde{g}^j(x) - g^j(x)\| \leq \delta^{(p-j)}(\epsilon_1)$

Induktionsbehauptung: $\|\tilde{g}^{j+1}(x) - g^{j+1}(x)\| \leq \delta^{(p-j-1)}(\epsilon_1)$

Der Induktionsanfang folgt sofort aus $\|\tilde{g}(x) - g(x)\| \leq \delta_1$

und (4.16). Der Beweis der Induktionsbehauptung ergibt sich

aus (4.24), denn es gilt:

a) Nach (4.18) ist $y := \tilde{g}^j(x) \in F^{\epsilon_0} \cap E_1$.

b) Es ist $z := g^j(x) = g(g^{j-1}(x)) \in g(F^{\epsilon_0})$, wobei die Beziehung $g^{j-1}(x) \in F^{\epsilon_0}$ aus (4.18) folgt, da mit $E_1 := E$ und $\tilde{g} := g$ trivialerweise die Voraussetzungen von Lemma 6 erfüllt sind.

Als Ergebnis dieses Induktionsbeweises erhält man insbesondere $\|\tilde{g}^p(x) - g^p(x)\| \leq \delta^{(a)}(\epsilon_1) = \epsilon_1$, d.h. (4.19) ist bewiesen.

VII. Beweis von (4.20):

Es genügt zu zeigen, daß

$$(4.25) \quad \mathcal{T}[\tilde{g}^p(F^{\delta_0} \cap E_1)] \cup \tilde{g}(\mathcal{T}[\tilde{g}^p(F^{\delta_0} \cap E_1)]) \subset \mathring{F}^{\delta_0} \cap E_1$$

ist. (Man beachte hierzu die Beweise von (1.12) und (1.13)!)

Es sei $x \in \mathcal{T}[\tilde{g}^p(F^{\delta_0} \cap E_1)]$ und $Z_x := \{x, \tilde{g}(x), \dots, \tilde{g}^{p-1}(x)\}$. Wegen $x \in F^{\delta_0} \cap E_1$ ist nach (4.18)

$$(4.26) \quad Z_x \subset F^{\epsilon_0} \cap E_1.$$

Unter der Annahme $Z_x \cap (E_1 \setminus \mathring{F}^{\delta_0}) \neq \emptyset$ erhält man:

Die Menge $W := \{j \in \{0, \dots, p-1\} \mid \tilde{g}^j(x) \in E_1 \setminus \mathring{F}^{\delta_0}\}$ ist nicht leer. Es sei $m := \max_{j \in W} [j]$. Dann ist

$$(4.27) \quad y := \tilde{g}^m(x) \in E_1 \setminus \mathring{F}^{\delta_0},$$

und gleichzeitig gilt

$$(4.28) \quad \tilde{g}(y) \in F^{\delta_0} \cap E_1,$$

denn:

a) Für $m \leq p-2$ ist nach der Definition von W und m $\tilde{g}(y) = \tilde{g}^{m+1}(x) \notin E_1 \setminus \mathring{F}^{\delta_0}$ und somit $\tilde{g}(y) \in \mathring{F}^{\delta_0} \cap E_1$ (denn wegen (4.26) ist $\tilde{g}(y) = \tilde{g}^{m+1}(x) \in E_1$).

b) Für $m = p-1$ ist $\tilde{g}(y) = \tilde{g}^{m+1}(x) = \tilde{g}^p(x) = x \in F^{\delta_0} \cap E_1$.

Nach (4.26) ist $y \in F^{\epsilon_0} \cap E_1$, also $\|\tilde{g}(y) - g(y)\| \leq \delta_1$ und somit (vgl. (4.28))

$$g(y) = \tilde{g}(y) + (g(y) - \tilde{g}(y)) \in (F^{\delta_0})^{\delta_1}.$$

Da zudem nach (4.21)

$$(F^{\delta_0})^{\delta_1} \subset F^{2\delta_0} \subset F^{\delta^{(p-2)}(\epsilon_0)}$$

ist, erhält man $g(y) \in F^{\delta^{(p-2)}(\epsilon_0)}$. Mit Hilfe von (4.23) (angewendet auf $E_1 := E$ und $\tilde{g} := g$) folgt nun induktiv, daß

$$g^{j-1}(y) \in F^{\delta^{(p-j)}(\epsilon_0)} \text{ für } j = 2, \dots, p-1$$

ist. Berücksichtigt man noch $g^0(y) = y = \tilde{g}^m(x) \in Z_x \subset F^{\epsilon_0}$ (vgl. (4.26) und (4.27)) und $\delta^{(p-j)}(\epsilon_0) \leq \epsilon_0$ für $j = 1, \dots, p-1$ (nach (4.21)), so folgt

$$g^{j-1}(y) \in F^{\epsilon_0} \text{ für } j = 1, \dots, p-1,$$

und deshalb gilt:

$$(4.29) \quad g^j(y) \in g(F^{\epsilon_0}) \text{ für } j = 1, \dots, p-1.$$

Außerdem gilt

$$(4.30) \quad \tilde{g}^j(y) \in F^{\epsilon_0} \cap E_1 \text{ für } j = 1, \dots, p-1,$$

denn es ist

$$a) \quad \tilde{g}^j(y) = \tilde{g}^{m+j}(x) \text{ nach (4.27),}$$

$$b) \quad 1 \leq m+j \leq 2p-2 \text{ wegen } m \in \{0, \dots, p-1\} \text{ und}$$

$$j \in \{1, \dots, p-1\},$$

$$c) \quad \tilde{g}^j(y) = \tilde{g}^{m+j}(x) \in Z_x \text{ (für } 1 \leq m+j \leq p-1) \text{ bzw.}$$

$$\tilde{g}^j(y) = \tilde{g}^{m+j}(x) = \tilde{g}^{m+j-p}(\tilde{g}^p(x)) = \tilde{g}^{m+j-p}(x) \in Z_x \text{ (für}$$

$$p \leq m+j \leq 2p-2) \text{ nach der Definition von } Z_x,$$

$$d) \quad Z_x \subset F^{\epsilon_0} \cap E_1 \text{ nach (4.26).}$$

Mit Hilfe von (4.29) und (4.30) erhält man nun nach (4.24)

induktiv - beginnend mit $\|\tilde{g}(y) - g(y)\| \leq \delta_1 \leq \delta^{(p-1)}(\epsilon_1)$ - , daß $\|\tilde{g}^j(y) - g^j(y)\| \leq \delta^{(p-j)}(\epsilon_1)$ ist für $j = 1, \dots, p$. Insbesondere gilt also $\|\tilde{g}^p(y) - g^p(y)\| \leq \delta^{(0)}(\epsilon_1) = \epsilon_1$. Da zudem wegen $y \in F^{\epsilon_0} \cap (E_1 \setminus \overset{\circ}{F}^{\delta_0}) \subset F^{\epsilon_0} \setminus \overset{\circ}{F}^{\delta_0} = \overline{F^{\epsilon_0} \setminus \overset{\circ}{F}^{\delta_0}}$

(siehe insbesondere (4.26) und (4.27)) und (4.14)

$\|y - g^p(y)\| \geq 2\epsilon_1$ ist, erhält man

$$\|y - \tilde{g}^p(y)\| \geq \|y - g^p(y)\| - \|\tilde{g}^p(y) - g^p(y)\| \geq 2\epsilon_1 - \epsilon_1 = \epsilon_1$$

im Widerspruch zu $y = \tilde{g}^m(x) = \tilde{g}^m(\tilde{g}^p(x)) = \tilde{g}^p(\tilde{g}^m(x)) = \tilde{g}^p(y)$.

Es ist also $Z_x \subset \overset{\circ}{F}^{\delta_0} \cap E_1$ für alle $x \in \mathcal{T}[\tilde{g}^p(F^{\delta_0} \cap E_1)]$, und folglich sind die Beziehungen (4.25) und - als Konsequenz davon - (4.20) richtig.

q.e.d.

Nach diesen Vorbereitungen wird nun die schrittweise Abänderung der Abbildung g explizit durchgeführt:

I. Da $\overline{g(F^{\epsilon_0})}$ kompakt ist (vgl. Seite 56 oben), existiert auf dieser Menge ein endliches $\frac{\delta_1}{4}$ -Netz $\{y_1, \dots, y_s\}$. E^n sei die lineare Hülle (über dem Körper der reellen Zahlen - auch bei komplexen Banachräumen!) der Vektoren $y_1, \dots, y_s$ (mit einer Dimension $n \leq s$). Der Schaudersche "Projektions"-Operator $p_n: \overline{g(F^{\epsilon_0})} \rightarrow E^n$, definiert durch

$$p_n(z) := \frac{\sum_{j=1}^s \mu_j(z) y_j}{\sum_{j=1}^s \mu_j(z)} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \mu_j(z) := \max[0, \frac{\delta_1}{2} - \|z - y_j\|] \\ \text{für alle } z \in \overline{g(F^{\epsilon_0})}, \end{cases}$$

bildet $\overline{g(F^{\epsilon_0})}$ stetig in den E^n ab. Außerdem gilt für alle $x \in F^{\epsilon_0}$:

$$\|p_n(g(x)) - g(x)\| = \left\| \frac{\sum_{j=1}^s \mu_j(g(x))(y_j - g(x))}{\sum_{j=1}^s \mu_j(g(x))} \right\| \leq \frac{\sum_{j=1}^s \mu_j(g(x)) \|y_j - g(x)\|}{\sum_{j=1}^s \mu_j(g(x))}.$$

Da $\mu_j(g(x)) = 0$ für $\|y_j - g(x)\| \geq \frac{\delta_1}{2}$ ist, folgt:

$$\frac{\sum_{j=1}^s \mu_j(g(x)) \|y_j - g(x)\|}{\sum_{j=1}^s \mu_j(g(x))} \leq \frac{\sum_{j=1}^s \mu_j(g(x)) \frac{\delta_1}{2}}{\sum_{j=1}^s \mu_j(g(x))} = \frac{\delta_1}{2}.$$

Es ist also

$$(4.31) \quad \|p_n(g(x)) - g(x)\| \leq \frac{\delta_1}{2} \text{ für alle } x \in F^{\epsilon_0}.$$

Man kann somit Lemma 6 (für $E_1 := E$) auf $\tilde{g} := \hat{g}$ mit

$$(4.32) \quad \hat{g} := p_n \circ g(F^{\epsilon_0})$$

anwenden und erhält die Beziehungen $F^{\delta_0} \subset D[\hat{g}^p]$ (nach (4.18)) und $\|g^p(x) - \hat{g}^p(x)\| \leq \epsilon_1$ für alle $x \in F^{\delta_0}$ (nach (4.19)). Da zudem nach (4.14) $\|x - g^p(x)\| \geq 2\epsilon_1$ für alle $x \in \partial(F^{\delta_0})$ ist, folgt für alle $x \in \partial(F^{\delta_0})$ und $t \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} & \|t(x - g^p(x)) + (1-t)(x - \hat{g}^p(x))\| = \\ & = \|(x - g^p(x)) + (1-t)(g^p(x) - \hat{g}^p(x))\| \geq \\ & \geq \|x - g^p(x)\| - (1-t)\|g^p(x) - \hat{g}^p(x)\| \geq \\ & \geq 2\epsilon_1 - (1-t)\epsilon_1 \geq \epsilon_1. \end{aligned}$$

$(id - g^p)$ und $(id - \hat{g}^p)$ sind also auf F^{δ_0} homotop (bzgl. 0), d.h. es ist

$$(4.33) \quad d[id - \hat{g}^p, F^{\delta_0}, 0] = d[id - g^p, F^{\delta_0}, 0].$$

Wegen $\delta_0 \leq \epsilon_0$ (vgl. (4.21)) und $F^{\epsilon_0} \subset M$ (vgl. (4.15)) ist $F^{\delta_0} \subset M$. Da zudem $\mathcal{F}[g^p(\bar{M})] =: F \subset \mathring{F}^{\delta_0}$ ist, erhält man

$d[\text{id} - g^p, F^{\delta_0}, 0] = d[\text{id} - g^p, M, 0]$, woraus mit Hilfe von (0.7) und (4.33)

$$(4.34) \quad d[\text{id} - \hat{g}^p, F^{\delta_0}, 0] \not\equiv 0 \pmod{p}$$

folgt.

II. Die im obigen Abschnitt I durchgeführte Konstruktion der Abbildung $\hat{g}$ (mit endlichdimensionalem Wertebereich!) macht es nun möglich, für den Rest des Beweises auf endlichdimensionale Räume überzugehen. Dabei wird noch der E^n durch den Euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ ersetzt:

Es sei $j: E^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Isomorphismus und

$$(4.35) \quad S := j(F^{\epsilon_0} \cap E^n)$$

sowie

$$(4.36) \quad T := \overline{j(\hat{F}^{\delta_0} \cap E^n)}.$$

(Es ließe sich zeigen, daß $T = j(F^{\delta_0} \cap E^n)$ ist.)

Für Abbildungen $h_1: V \rightarrow E^n$ ($V \subset E^n$) und $h_2: W \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($W \subset \mathbb{R}^n$) gilt ⁸⁾:

$$(4.37) \quad h_1^m \xrightarrow{j} (j \circ h_1 \circ j^{-1} \langle j(V) \rangle)^m \text{ für alle } m \in \mathbb{N}$$

und

$$(4.38) \quad h_2^m \xrightarrow{j} (j^{-1} \circ h_2 \circ j \langle j^{-1}(W) \rangle)^m \text{ für alle } m \in \mathbb{N}.$$

⁸⁾ Es seien U_1 und U_2 zwei Mengen, die durch $i: U_1 \rightarrow U_2$ bijektiv aufeinander abgebildet werden. Eine Abbildung $h: U_1' \rightarrow U_1$ ($U_1' \subset U_1$) induziert vermöge i eine Abbildung $h': i(U_1') \rightarrow U_2$, die $i(x)$ in $i(h(x))$ abbildet für alle $x \in U_1'$. Für diesen Sachverhalt wird abkürzend das Symbol $h \xrightarrow{i} h'$ verwendet.

Die Beziehungen (4.37) und (4.38) sind für $m = 1$ trivial, aber auch für $m \geq 2$ sehr leicht einzusehen, so daß auf einen Beweis hier verzichtet werden kann. Aus (4.37) folgt insbesondere

$$(4.39) \quad \mathring{G}(F^{\epsilon_0} \cap E^n) \xrightarrow{j} j \cdot \mathring{G} \cdot j^{-1}(S)$$

und

$$(4.40) \quad (\mathring{G}(F^{\epsilon_0} \cap E^n))^P \xrightarrow{j} (j \cdot \mathring{G} \cdot j^{-1}(S))^P.$$

Die Norm im E^n (d.h. $\|\cdot\|_{E^n}$) induziert vermöge des Isomorphismus j im $\mathbb{R}^n$ eine Norm $\|\cdot\|_{\text{ind}} (:= \|\cdot\|_{E^n} \circ j^{-1})$, die mit der Norm $|\cdot|$ äquivalent ist, da der $\mathbb{R}^n$ endlich-dimensional ist. Es folgt daher:

a) Die Menge $j(\mathring{F}^{\delta_0} \cap E^n)$ ist offen. Deshalb ist $j(\mathring{F}^{\delta_0} \cap E^n) \subset \mathring{T}$ (vgl. (4.36)), und somit gilt

$$T := \overline{j(\mathring{F}^{\delta_0} \cap E^n)} \subset \overline{\mathring{T}} \subset \overline{T} = T,$$

woraus insbesondere die Beziehung $T = \overline{\mathring{T}}$ folgt.

b) Es gibt eine Konstante $c > 0$, so daß gilt:

$$(4.41) \quad c \|x\| \leq |j(x)| \text{ für alle } x \in E^n.$$

c) Unter Benutzung von einfachen topologischen Hilfsmitteln (z.B. den Beziehungen $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$, $\partial \overline{A} \subset \partial A$ und $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ für Teilmengen A, B eines topologischen Raumes), der trivialen Beziehung $j(A) \setminus j(B) \subset j(A \setminus B)$ für $A, B \subset E^n$ (wegen der Injektivität von j gilt sogar $j(A) \setminus j(B) = j(A \setminus B)$) und der Identität $j(\mathring{F}^{\delta_0} \cap E^n) = j(\mathring{F}^{\delta_0} \cap E^n)$ (Folgerung aus der Äquivalenz der Normen $\|\cdot\|_{\text{ind}}$ und $|\cdot|$) erhält man:

$$\partial T = \partial \left[\overline{j(\mathring{F}^{\delta_0} \cap E^n)} \right] \subset$$

$$\subset \partial [j(\mathring{F}^{\delta_0} \cap E^n)] = \overline{j(\mathring{F}^{\delta_0} \cap E^n) \setminus j(\mathring{F}^{\delta_0} \cap E^n)} =$$

$$\begin{aligned}
 &= j(\overline{F^{\delta_0} \cap E^n}) \setminus j(F^{\delta_0} \cap E^n) \subset j(\overline{[F^{\delta_0} \cap E^n]}) \setminus [F^{\delta_0} \cap E^n] \subset \\
 &\subset j(\overline{[F^{\delta_0} \cap E^n]} \setminus [F^{\delta_0} \cap E^n]) \subset j([F^{\delta_0} \cap E^n] \setminus [F^{\delta_0} \cap E^n]) = \\
 &= j([F^{\delta_0} \setminus F^{\delta_0}] \cap E^n) = j(\partial[F^{\delta_0}] \cap E^n),
 \end{aligned}$$

d.h. es ist

$$(4.42) \quad \partial T \subset j(\partial[F^{\delta_0}] \cap E^n).$$

Wegen $F^{\delta_0} \subset D[\hat{g}^P]$ (vgl. Seite 63 mitte) und $\hat{g}(x) \in E^n$ für alle $x \in D[\hat{g}] = F^{\epsilon_0}$ ist $F^{\delta_0} \cap E^n \subset D[(\hat{g}(F^{\epsilon_0} \cap E^n))^P]$. Nach (4.40) und Fußnote 8 ist also $j(F^{\delta_0} \cap E^n) \subset D[(j \circ \hat{g} \circ j^{-1}(S))^P]$ und folglich (vgl. (4.36))

$$(4.43) \quad T \subset D[(j \circ \hat{g} \circ j^{-1}(S))^P].$$

Da $x - \hat{g}^P(x) \neq 0$ ist für alle $x \in \partial(F^{\delta_0})$ (siehe Seite 63), gilt mit dem Isomorphismus j auch

$j(x) - j(\hat{g}^P(x)) (= j(x - \hat{g}^P(x))) \neq 0$ für alle $x \in \partial(F^{\delta_0}) \cap E^n$, was gleichbedeutend ist mit

$$j(x) - (j \circ \hat{g} \circ j^{-1}(S))^P(j(x)) \neq 0 \text{ für alle } x \in \partial(F^{\delta_0}) \cap E^n.$$

Aufgrund von (4.42) folgt daraus

$$(4.44) \quad (\text{id} - (j \circ \hat{g} \circ j^{-1}(S))^P)(y) \neq 0 \text{ für alle } y \in \partial T.$$

d) Aus der Stetigkeit von $\hat{g}$, j und j^{-1} (j und j^{-1} sind stetig aufgrund der Äquivalenz der Normen $\|\cdot\|_{\text{ind}}$ und $|\cdot|$) folgt, daß

$$(4.45) \quad j \circ \hat{g} \circ j^{-1}(S) \text{ stetig}$$

ist. Damit ist auch $(j \circ \hat{g} \circ j^{-1}(S))^P$ stetig und wegen (4.43) insbesondere

$$(4.46) \quad (\text{id} - (j \circ \hat{g} \circ j^{-1}(S))^P)(T) \text{ stetig}.$$

Da T beschränkt (vgl. (4.9) und (4.36)) und Abschließung einer offenen Menge (wegen $T = \overline{T}$) ist und da die Beziehungen (4.43), (4.44) und (4.46) gelten, existiert der Abbildungsgrad $d[\text{id} - (j \circ \hat{g} \circ j^{-1} \langle S \rangle)^P, T, 0]$, und nach bekannten Sätzen und Prinzipien der Theorie des Abbildungsgrades (siehe etwa J. T. Schwartz [23], Seite 105-107) ist

$$d[\text{id} - (j \circ \hat{g} \circ j^{-1} \langle S \rangle)^P, T, 0] = d[\text{id} - \hat{g}^P, F^{\delta_0}, 0],$$

so daß nach (4.34) gilt:

$$(4.47) \quad d[\text{id} - (j \circ \hat{g} \circ j^{-1} \langle S \rangle)^P, T, 0] \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

III. Da die Abbildung $j \circ \hat{g} \circ j^{-1} \langle S \rangle: S \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig ist (siehe (4.45)), gibt es eine stetig differenzierbare Abbildung $g_0: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$(4.48) \quad |(j \circ \hat{g} \circ j^{-1} \langle S \rangle)(z) - g_0(z)| \leq c \frac{\delta_1}{4} \text{ für alle } z \in S.$$

Nach (4.38) gilt $g_0 \xrightarrow{j^{-1}} j^{-1} \circ g_0 \circ j$ und umgekehrt $j^{-1} \circ g_0 \circ j \xrightarrow{j} g_0$. Unter Berücksichtigung von (4.41) und der Isomorphie von j folgt somit für alle $x \in F^{\epsilon_0} \cap E^n$:

$$\begin{aligned} \|\hat{g}(x) - (j^{-1} \circ g_0 \circ j)(x)\| &\leq \frac{1}{c} |j(\hat{g}(x) - (j^{-1} \circ g_0 \circ j)(x))| = \\ &= \frac{1}{c} |j(\hat{g}(x)) - j((j^{-1} \circ g_0 \circ j)(x))| = \\ &= \frac{1}{c} |(j \circ \hat{g} \circ j^{-1} \langle S \rangle)(j(x)) - g_0(j(x))|. \end{aligned}$$

(Umformungen dieser Art treten im folgenden noch mehrfach auf, werden dann aber nicht mehr so ausführlich dargestellt, da stets nach dem gleichen Prinzip verfahren wird!) Da wegen $j(x) \in j(F^{\epsilon_0} \cap E^n) = S$ und (4.48)

$$\frac{1}{c} |(j \circ \hat{g} \circ j^{-1} \langle S \rangle)(j(x)) - g_0(j(x))| \leq \frac{\delta_1}{4}$$

ist, folgt

$$\|\hat{g}(x) - (j^{-1} \circ g_0 \circ j)(x)\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{c} |(j \circ \hat{g} \circ j^{-1})(S)(j(x)) - g_0(j(x))| \leq \frac{\delta_1}{4},$$

und somit ist für alle $x \in F^{\delta_0} \cap E^n$ (vgl. (4.31))

$$\|g(x) - (j^{-1} \circ g_0 \circ j)(x)\| \leq$$

$$\leq \|g(x) - \hat{g}(x)\| + \|\hat{g}(x) - (j^{-1} \circ g_0 \circ j)(x)\| \leq$$

$$\leq \frac{\delta_1}{2} + \frac{\delta_1}{4} = \frac{3}{4} \delta_1,$$

d.h. es ist

$$(4.49) \quad \|g(x) - (j^{-1} \circ g_0 \circ j)(x)\| \leq \frac{3}{4} \delta_1 \text{ für alle } x \in F^{\delta_0} \cap E^n.$$

Man kann also Lemma 6 auf $\tilde{g} := (j^{-1} \circ g_0 \circ j)|_{(F^{\delta_0} \cap E^n)}$ (mit $E_1 := E^n$) anwenden und erhält:

a) Für alle $x \in \partial T$ ist $j^{-1}(x) \in j^{-1}(\partial T) \subset \partial(F^{\delta_0}) \cap E^n \subset F^{\delta_0} \subset D[g^P]$ (vgl. (4.42) und (4.18)) und es gilt:

$$|x - g_0^P(x)| \geq c \|j^{-1}(x) - (j^{-1} \circ g_0 \circ j)^P(j^{-1}(x))\| \geq$$

$$\geq c (\|j^{-1}(x) - g^P(j^{-1}(x))\| - \|g^P(j^{-1}(x)) - (j^{-1} \circ g_0 \circ j)^P(j^{-1}(x))\|).$$

Wegen $j^{-1}(x) \in \partial(F^{\delta_0}) \cap E^n$ (siehe oben) ist nach (4.14) und (4.19)

$$\|j^{-1}(x) - g^P(j^{-1}(x))\| - \|g^P(j^{-1}(x)) - (j^{-1} \circ g_0 \circ j)^P(j^{-1}(x))\| \geq$$

$$\geq 2\epsilon_1 - \epsilon_1 = \epsilon_1,$$

so daß man insgesamt

$$|x - g_0^P(x)| \geq c \epsilon_1 > 0$$

erhält, d.h. es ist

$$(4.50) \quad x \notin g_0^P(x) \text{ für alle } x \in \partial T.$$

b) Für alle $x \in T$ ist $j^{-1}(x) \in j^{-1}(T) = j^{-1}(\overline{j(F^{\delta_0} \cap E^n)}) \subset j^{-1}(j(F^{\delta_0} \cap E^n)) = F^{\delta_0} \cap E^n$, und folglich gilt nach (4.17):

$$\|x - g_0(x)\| \geq c \|j^{-1}(x) - (j^{-1} \circ g_0 \circ j)(j^{-1}(x))\| \geq c \frac{\alpha}{2} > 0,$$

d.h. es ist

$$(4.51) \quad x \neq g_0(x) \text{ für alle } x \in T.$$

IV. Mit $h_0 := g_0$ und $G := \tilde{T}$ sind die Voraussetzungen von Lemma 4 erfüllt, denn es ist $g_0 \in C^1(\mathbb{R}^n)$ und T beschränkt (siehe Seite 67) und es gelten die Beziehungen (4.50) und (4.51). Es gibt also eine Abbildung $g_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$(4.52) \quad g_1 \in C^1(\mathbb{R}^n),$$

$$(4.53) \quad \|g_0(x) - g_1(x)\| \leq c \frac{\delta_1}{4} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n$$

und

$$(4.54) \quad J_{\text{id}-g_1}[x] \neq 0 \text{ für alle } x \in \mathcal{F}[g_1^P(T)].$$

Wegen (4.41) und (4.53) gilt für alle $x \in E^n$:

$$\begin{aligned} & \| (j^{-1} \circ g_0 \circ j)(x) - (j^{-1} \circ g_1 \circ j)(x) \| \leq \\ & \leq \frac{1}{c} \| g_0(j(x)) - g_1(j(x)) \| \leq \frac{1}{c} c \frac{\delta_1}{4} = \frac{\delta_1}{4}, \end{aligned}$$

so daß mit Hilfe von (4.49) für alle $x \in F^{\epsilon_0} \cap E^n$ folgt:

$$\begin{aligned} & \| g(x) - (j^{-1} \circ g_1 \circ j)(x) \| \leq \\ & \leq \| g(x) - (j^{-1} \circ g_0 \circ j)(x) \| + \| (j^{-1} \circ g_0 \circ j)(x) - (j^{-1} \circ g_1 \circ j)(x) \| \leq \\ & \leq \frac{3}{4} \delta_1 + \frac{1}{4} \delta_1 = \delta_1. \end{aligned}$$

Man kann also Lemma 6 auf $(j^{-1} \circ g_1 \circ j)(F^{\epsilon_0} \cap E^n)$ (mit $E_1 := E^n$) anwenden und erhält:

a) Es sei $x \in \partial T$. Dann ist $j^{-1}(x) \in \partial(F^{\epsilon_0}) \cap E^n \subset D[g^P]$ (siehe Beweis von (4.50)), und es gilt für alle $t \in [0,1]$:

$$|t[x - (j \circ g \circ j^{-1})(x))^P(x)] + (1-t)[x - g_1^P(x)]| \geq$$

$$\begin{aligned}
 &\geq c \|t[j^{-1}(x) - \hat{g}^p(j^{-1}(x))] + \\
 &\quad + (1-t)[j^{-1}(x) - (j^{-1} \circ g_1 \circ j)^p(j^{-1}(x))]\| = \\
 &= c \| [j^{-1}(x) - g^p(j^{-1}(x))] + t[g^p(j^{-1}(x)) - \hat{g}^p(j^{-1}(x))] + \\
 &\quad + (1-t)[g^p(j^{-1}(x)) - (j^{-1} \circ g_1 \circ j)^p(j^{-1}(x))]\| \geq \\
 &\geq c (\|j^{-1}(x) - g^p(j^{-1}(x))\| - t\|g^p(j^{-1}(x)) - \hat{g}^p(j^{-1}(x))\| - \\
 &\quad - (1-t)\|g^p(j^{-1}(x)) - (j^{-1} \circ g_1 \circ j)^p(j^{-1}(x))\|).
 \end{aligned}$$

Wegen $j^{-1}(x) \in \partial(F^{\delta_0}) \cap E^n$ gilt

$$\|j^{-1}(x) - g^p(j^{-1}(x))\| \geq 2\epsilon_1 \text{ (nach (4.14))},$$

$$\|g^p(j^{-1}(x)) - \hat{g}^p(j^{-1}(x))\| \leq \epsilon_1 \text{ (siehe Seite 63 mitte)}$$

und

$$\|g^p(j^{-1}(x)) - (j^{-1} \circ g_1 \circ j)^p(j^{-1}(x))\| \leq \epsilon_1 \text{ (nach (4.19))}.$$

Insgesamt erhält man also für alle $x \in \partial T$ und $t \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}
 &|t[x - (j \circ \hat{g} \circ j^{-1}(S))^p(x)] + (1-t)[x - g_1^p(x)]| \geq \\
 &\geq c(2\epsilon_1 - t\epsilon_1 - (1-t)\epsilon_1) = c\epsilon_1 > 0.
 \end{aligned}$$

$(id - (j \circ \hat{g} \circ j^{-1}(S))^p)$ und $(id - g_1^p)$ sind also auf T homotop (bzgl. 0), so daß wegen (4.47) gilt:

$$(4.55) \quad d[id - g_1^p, T, 0] \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

b) Ganz analog zum Beweis von (4.51) verläuft der Nachweis der Tatsache, daß $x \notin g_1(x)$ ist für alle $x \in T$. Es gilt also

$$(4.56) \quad \mathcal{F}[g_1(T)] = \emptyset.$$

c) Nach (4.20) ist

$$\begin{aligned}
 &\mathcal{F}[(j^{-1} \circ g_1 \circ j)^p(F^{\delta_0} \cap E^n)] = \\
 &= (j^{-1} \circ g_1 \circ j)(\mathcal{F}[(j^{-1} \circ g_1 \circ j)^p(F^{\delta_0} \cap E^n)]) \subset \dot{F}^{\delta_0} \cap E^n.
 \end{aligned}$$

Daraus folgt sofort

$$j(\mathfrak{F}[(j^{-1} \cdot g_1 \cdot j)^P \langle F^{\delta_0} \cap E^n \rangle]) = \\ = j((j^{-1} \cdot g_1 \cdot j)(\mathfrak{F}[(j^{-1} \cdot g_1 \cdot j)^P \langle F^{\delta_0} \cap E^n \rangle])) \subset j(\mathring{F}^{\delta_0} \cap E^n),$$

was gleichbedeutend ist mit

$$\mathfrak{F}[g_1^P \langle j(F^{\delta_0} \cap E^n) \rangle] = g_1(\mathfrak{F}[g_1^P \langle j(F^{\delta_0} \cap E^n) \rangle]) \subset j(\mathring{F}^{\delta_0} \cap E^n),$$

denn einerseits ist wegen $(j^{-1} \cdot g_1 \cdot j) \xrightarrow{i} g_1$

$$j((j^{-1} \cdot g_1 \cdot j)(\mathfrak{F}[(j^{-1} \cdot g_1 \cdot j)^P \langle F^{\delta_0} \cap E^n \rangle])) = \\ = g_1(j(\mathfrak{F}[(j^{-1} \cdot g_1 \cdot j)^P \langle F^{\delta_0} \cap E^n \rangle]))$$

und andererseits folgt aus der Isomorphie von j trivialerweise

$$j(\mathfrak{F}[(j^{-1} \cdot g_1 \cdot j)^P \langle F^{\delta_0} \cap E^n \rangle]) = \mathfrak{F}[g_1^P \langle j(F^{\delta_0} \cap E^n) \rangle].$$

Wegen $\mathfrak{F}[g_1^P \langle j(F^{\delta_0} \cap E^n) \rangle] \subset j(\mathring{F}^{\delta_0} \cap E^n)$ und

$j(\mathring{F}^{\delta_0} \cap E^n) \subset T \subset j(F^{\delta_0} \cap E^n)$ (vgl. (4.36)) ist

$$\mathfrak{F}[g_1^P \langle j(F^{\delta_0} \cap E^n) \rangle] = \mathfrak{F}[g_1^P \langle T \rangle],$$

so daß folgt:

$$\mathfrak{F}[g_1^P \langle T \rangle] = g_1(\mathfrak{F}[g_1^P \langle T \rangle]) \subset j(\mathring{F}^{\delta_0} \cap E^n).$$

Mit Hilfe von $j(\mathring{F}^{\delta_0} \cap E^n) \subset \mathring{T}$ (Folgerung aus $j(\mathring{F}^{\delta_0} \cap E^n) \subset T$

und der Tatsache, daß $j(\mathring{F}^{\delta_0} \cap E^n)$ offen ist) erhält man daraus

$$(4.57) \quad \mathfrak{F}[g_1^P \langle T \rangle] = g_1(\mathfrak{F}[g_1^P \langle T \rangle]) \subset \mathring{T}.$$

Aus den Beziehungen (4.54) - (4.57) wird nun ein Widerspruch hergeleitet:

Für $x \in \mathfrak{F}[g_1^P \langle T \rangle]$ sei $Z_x := \{x, g_1(x), \dots, g_1^{p-1}(x)\}$.

Wegen (4.57) ist $Z_x \subset \mathfrak{F}[g_1^P \langle T \rangle]$ für alle $x \in \mathfrak{F}[g_1^P \langle T \rangle]$. Dann

bildet trivialerweise für $x, y \in \mathfrak{F}[g_1^P \langle T \rangle]$

$$y \sim x :\Leftrightarrow Z_y = Z_x \quad (\Leftrightarrow y \in Z_x)$$

eine Äquivalenzrelation in $\mathcal{F}[g_1^P\langle T \rangle]$ mit den Äquivalenzklassen Z_x (Man beachte hierzu auch die Betrachtungen auf Seite 49, 6. - 12. Zeile, die sich direkt übertragen lassen, wenn man h_1 durch g_1 ersetzt). Wegen (4.54) enthält $\mathcal{F}[g_1^P\langle T \rangle]$ nur endlich viele Punkte und deshalb auch nur endlich viele (verschiedene) Äquivalenzklassen $Z_{x^{(1)}}, \dots, Z_{x^{(r)}}$ ($r \in \mathbb{N}$), die jeweils wegen (4.56) aus genau p verschiedenen Punkten bestehen. Aus (4.54) und (3.3) folgt, daß die Abbildungsindizes $i[\text{id} - g_1^P, x]$ innerhalb einer festen Äquivalenzklasse $Z_{x^{(k)}}$ ($k \in \{1, \dots, r\}$) konstant und ± 1 sind. Diese Zahlen sollen mit i_k bezeichnet werden. Da außerdem die $Z_{x^{(j)}}$ ($j = 1, \dots, r$) disjunkt sind und $\bigcup_{j=1}^r Z_{x^{(j)}} = \mathcal{F}[g_1^P\langle T \rangle]$ ist, erhält man

$$\begin{aligned} d[\text{id} - g_1^P, T, 0] &= \sum_{x \in \mathcal{F}[g_1^P\langle T \rangle]} i[\text{id} - g_1^P, x] = \\ &= \sum_{k=1}^r \left(\sum_{x \in Z_{x^{(k)}}} i[\text{id} - g_1^P, x] \right) = \sum_{k=1}^r \left(\sum_{x \in Z_{x^{(k)}}} i_k \right) = \\ &= \sum_{k=1}^r p \cdot i_k = p \cdot \sum_{k=1}^r i_k \equiv 0 \pmod{p} \end{aligned}$$

im Widerspruch zu (4.55).

Damit ist die Annahme (4.1) ($\mathcal{F}[g\langle M \rangle] = \emptyset$) widerlegt, d.h. Lemma 1 ist bewiesen.

q.e.d.

Anhang I.

Es wurde vergessen nachzuweisen, daß die auf Seite 39 in (3.18), (3.19) und (3.20) definierten Konstanten C , τ und β größer als Null sind.

Man kann sich auf den Beweis von $C > 0$ und $\tau > 0$ beschränken, da dann trivial $\beta > 0$ folgt. Daß $\tau > 0$ ist, folgt sofort aus $x \neq h_0(x)$ für alle $x \in \bar{G}$, der Stetigkeit von h_0 und der Kompaktheit von $\bar{G}$ ($\neq \emptyset$ nach (3.15)).

$C > 0$ ist gleichbedeutend damit, daß h_0 auf $\overline{\text{co}[G_1]}$ nicht konstant ist. Wäre $h_0(\overline{\text{co}[G_1]})$ konstant, d.h. $h_0(x) = z$ für alle $x \in \overline{\text{co}[G_1]}$, so wäre wegen $\{z\} = h_0(G) \subset G_1 \subset \overline{\text{co}[G_1]}$ (vgl. (3.17))

$$\mathcal{T}[h_0(\overline{\text{co}[G_1]})] = \mathcal{T}[h_0^P(\overline{\text{co}[G_1]})] = \{z\}$$

im Widerspruch zu $\mathcal{T}[h_0(G)] = \emptyset$ und $\mathcal{T}[h_0^P(G)] \neq \emptyset$ (vgl. (3.15)).

Anhang II.

G. S. Jones [11] nennt eine Abbildung f "asymptotisch kompakt auf der Menge $S \subset D[f]$ ", wenn es eine kompakte Menge Y und eine Folge $\{f_n\}_1^\infty$ von gleichmäßig gegen f konvergierenden Abbildungen gibt mit den Eigenschaften:

a) Für alle $n, j \in \mathbb{N}$ ist $S \subset D[f_n^j]$.

b) Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $k_n \in \mathbb{N}$ mit $f_n^{k_n}(S) \subset Y$ für alle $k \geq k_n$.

Auch F. E. Browder und R. D. Nussbaum verwenden die Bezeichnung "asymptotisch kompakte Abbildung" (erstmal in [4]),

allerdings in einem anderen Sinne: Nach R. D. Nussbaum [28] soll F. E. Browder [26] folgende Definition angegeben haben: Eine Abbildung $f: K \rightarrow K$ heißt asymptotisch kompakt, wenn die Abschließung von $\bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(K)$ nichtleer und kompakt ist. In der noch nicht erschienenen Arbeit von F. E. Browder [26] und in der Dissertation von R. D. Nussbaum sollen Fixpunktsätze für solche Operatoren bewiesen worden sein, doch scheinen diese Ergebnisse kaum etwas mit den Hauptsätzen der vorliegenden Arbeit zu tun zu haben, wie man aus [28] schließen kann. (Die Arbeit von R. D. Nussbaum [28] enthält im wesentlichen eine Zusammenfassung der wichtigsten Resultate der Dissertation von R. D. Nussbaum und teilweise auch der Arbeit von F. E. Browder [26].)

Anhang III.

Zu dem auf Seite 3 erwähnten Fixpunktsatz für "verdichtende" Abbildungen ist zu sagen, daß der gleiche Satz schon 12 Jahre vor B. N. Sadovskii [20] von G. Darbo [27] bewiesen wurde, dessen Arbeit allem Anschein nach bis etwa 1968 ziemlich in Vergessenheit geriet.

Bezeichnungen

$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen = $\{1, 2, \dots\}$
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}^n$	n-dimensionaler Euklidischer Raum mit Punkten $x = (x_1, \dots, x_n)$ ($x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$) und der Norm $ \cdot $ mit $ x := (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$

Es seien $x, y \in \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Dann ist

$$[x, y] := \{z \in \mathbb{R} \mid x \leq z \leq y\}$$

$$(x, y) := \{z \in \mathbb{R} \mid x < z < y\}.$$

Entsprechend ist $[x, y)$ und $(x, y]$ definiert.

Die Zeichen $\subset, \supset, \setminus, \cup$ und $\cap$ werden in üblicher Weise verwendet, wobei bei $\subset$ und $\supset$ die Gleichheit der Mengen nicht ausgeschlossen wird.

Es sei E ein Banachraum mit der Norm $\|\cdot\|$, $M \subset E$, $x, y \in E$ und $\epsilon, \rho > 0$. Dann ist

$\overset{\circ}{M}$ offener Kern von M

$\overline{M}$ Abschließung von M

∂M Rand von M

$$M^\epsilon := \begin{cases} \{z \in E \mid \text{dist}(x, M) \leq \epsilon\} & \text{für } M \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{für } M = \emptyset \end{cases}$$

$\overset{\circ}{M}^\epsilon$ offener Kern von M^ϵ

$\text{co}[M]$ konvexe Hülle von M

$\overline{\text{co}[M]}$ heißt auch "konvexe Abschließung von M "

$\overline{x, y}$ vgl. Seite 25, Fußnote 4

$\langle x, y \rangle$ vgl. Seite 28, Fußnote 5

$$K(x, \rho) := \{z \in E \mid \|x - z\| \leq \rho\}$$

$$\overset{\circ}{K}(x, \rho) := \{z \in E \mid \|x - z\| < \rho\}$$

Es sei $M \subset N \subset E$, $z \in E$, $f: N \rightarrow E$ eine Abbildung, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $\epsilon > 0$.

id , $f(L)$, $D[f]$, f^k vgl. Seite 3, Fußnote 1

$\mathcal{T}[f]$, $d[f, M, z]$, $i[f, z]$ vgl. Seite 5, Fußnote 2

$\mathcal{T}^\epsilon[f] := (\mathcal{T}[f])^\epsilon$

$\mathring{\mathcal{T}}^\epsilon[f]$ Menge der inneren Punkte von $\mathcal{T}^\epsilon[f]$

Es seien f und g zwei Abbildungen. Dann wird definiert

$f + g$ Abbildung mit $D[f + g] := D[f] \cap D[g]$ und
 $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ für alle $x \in D[f + g]$

$f \circ g$ Im Falle $g(D[g]) \subset D[f]$ wird die Abbildung $f \circ g$
 erklärt mit $D[f \circ g] := D[g]$ und $(f \circ g)(x) := f(g(x))$
 für alle $x \in D[f \circ g]$.

Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ mit $M \subset \bar{M}$. Dann ist

$C^1(M)$ Menge der auf $\overset{\circ}{M}$ einmal stetig differenzierbaren
 Funktionen $f: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($m \in \mathbb{N}$), deren Ableitung
 sich stetig auf M fortsetzen läßt.

Für $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ aus $C^1(\mathbb{R}^n)$ und $x \in \mathbb{R}^n$ wird definiert

$\mathcal{M}_f[x]$ Jakobi-Matrix von f an der Stelle x

$J_f[x]$ Funktionaldeterminante von f an der Stelle x .

Zu den Symbolen

$\overset{!}{\mapsto}$, $\overset{!}{\mapsto^4}$ vgl. Seite 64, Fußnote 8.

Literaturverzeichnis

- [1] Alexandroff, P. - Hopf, H.:
Topologie. 1. Band
Chelsea Publishing Co., New York (1965)
- [2] Bellman, R.:
Introduction to matrix analysis.
McGraw-Hill Book Co., Inc., New York - Toronto - London
(1960)
- [3] Browder, F. E.:
On a generalization of the Schauder fixed point theorem.
Duke Math. J. 26, 291 - 303 (1959)
- [4] Browder, F. E. - Nussbaum, R. D.:
The topological degree for noncompact, non-linear
mappings in Banach spaces.
Bull. Amer. Math. Soc. 74, 671 - 677 (1968)
- [5] Dugundji, J.:
An extension of Tietze's theorem.
Pacific J. Math. 1, 353 - 367 (1951)
- [6] Frum - Ketkov, R. L.:
Mappings into a Banach space sphere. (russisch)
Dokl. Akad. Nauk SSSR 175, 1229 - 1231 (1967),
englische Übersetzung in
Soviet Math. Dokl. 8, 1004 - 1006 (1967)
- [7] Göhde, D.:
Über Fixpunkte bei stetigen Selbstabbildungen mit
kompakten Iterierten.
Math. Nachr. 28, 45 - 55 (1964)

- [8] Göhde, D.:
Zum Prinzip der kontraktiven Abbildung.
Math. Nachr. 30, 251 - 258 (1965)
- [9] Heinz, E.:
An elementary analytic theory of the degree of mapping
in n -dimensional space.
J. Math. Mech. 8, 231 - 247 (1959)
- [10] Hukuhara, M.:
Sur l'existence des points invariants d'une
transformation dans l'espace fonctionnel.
Jap. J. Math. 20, 1 - 4 (1950)
- [11] Jones, G. S.:
Stability and asymptotic fixed - point theory.
Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 53, 1262 - 1264 (1965)
- [12] Kakutani, S.:
Topological properties of the unit sphere of a
Hilbert space.
Proc. Imp. Acad. Tokyo 19, 269 - 271 (1943)
- [13] Krasnosel'skiĭ, M. A.:
Zwei Bemerkungen über die Methode der sukzessiven
Approximationen. (russisch)
Uspehi Mat. Nauk (N.S.) 10, Nr. 1 (63), 123 - 127 (1955)
- [14] Lefschetz, S.:
Topics in Topology.
Annals of Mathematics Studies, no. 10.
Princeton University Press, Princeton, N.J. (1942)

- [15] Loewner, Ch.:
A topological characterization of a class of
integral operators.
Ann. of Math. (2) 49, 316 - 332 (1948)
- [16] Mazur, S.:
Über die kleinste konvexe Menge, die eine gegebene
kompakte Menge enthält.
Studia Math. 2, 7 - 9 (1930)
- [17] Nguyen Huu Anh:
Note on a fixed - point theorem of F. E. Browder.
J. Math. Anal. Appl. 18, 391 - 392 (1967)
- [18] de Rham, G.:
Variétés différentiables.
Hermann et Cie, Paris (1955)
- [19] Rothe, E.:
Zur Theorie der topologischen Ordnung und der
Vektorfelder in Banachschen Räumen.
Compositio Math. 5, 177 - 197 (1937)
- [20] Sadovskii, B. N.:
Über ein Fixpunkt - Prinzip. (russisch)
Funkcional. Anal. i Priložen. 1, no. 2, 74 - 76 (1967)
- [21] Sard, A.:
The measure of the critical values of differentiable
maps.
Bull. Amer. Math. Soc. 48, 883 - 890 (1942)

- [22] Schauder, J.:
Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen.
Studia Math. 2, 171 - 180 (1930)
- [23] Schwartz, J. T.:
Nonlinear Functional Analysis.
Courant Institute of Mathematical Sciences,
New York University (1965)
- [24] Tychonoff, A.:
Ein Fixpunktsatz.
Math. Ann. 111, 767 - 776 (1935)
- [25] Zabreiko, P. P. - Krasnosel'skiĭ, M. A.:
A method for producing new fixed point theorems.
(russisch)
Dokl. Akad. Nauk SSSR 176, 1233 - 1235 (1967),
englische Übersetzung in
Soviet Math. Dokl. 8, 1297 - 1299 (1967)

Literatur zum Anhang

- [26] Browder, F. E.:
Asymptotic fixed point theorems.
Math. Ann., erscheint demnächst
- [27] Darbo, G.:
Punti uniti in trasformazioni a condominio non compatto.
Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 24, 84 - 92 (1955)
- [28] Nussbaum, R. D.:
The fixed point index and asymptotic fixed point
theorems for k - set - contractions.
Bull. Amer. Math. Soc. 75, 490 - 495 (1969)

Lebenslauf

Am 11. Oktober 1943 wurde ich in Erlangen geboren als Sohn des wiss. Assistenten Dr. Hans Steinlein und seiner Ehefrau Anna Steinlein, geb. Delisle.

Ende 1945 starb mein Vater an den Folgen eines Kriegsleidens. Kurz darauf siedelte meine Mutter mit meiner Schwester und mir nach München über.

Ich besuchte von 1949 bis 1953 die Volksschule an der Herterichstraße in München - Solln und anschließend das Neue Realgymnasium München (jetzige Bezeichnung Albert - Einstein - Gymnasium), an dem ich im Sommer 1962 die Reifeprüfung ablegte.

Vom Wintersemester 1962/63 bis zum Sommersemester 1967 studierte ich an der Universität München die Fächer Mathematik und Physik. Im Herbst 1967 legte ich für diese Fächerkombination die wissenschaftliche Prüfung für das Lehramt an Gymnasien ab. Meine Zulassungsarbeit - mit einem Thema aus dem Gebiet der elliptischen Differentialoperatoren - wurde von Prof. Dr. E. Heinz betreut.

Seit dem 1. Dezember 1967 bin ich Verwalter der Dienstgeschäfte eines wissenschaftlichen Assistenten am Mathematischen Institut der Universität München.

